Aufgabe 1 (5 Punkte)

Finden sie den Fehler in folgendem "Beweis", dass $\chi_A(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ für einen Körper K gilt: Es gilt

$$\chi_A(A) = [\det(\mathbb{I}_n \cdot T - A)](A) = \det(\mathbb{I}_n \cdot A - A) = \det(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag. Diese Aufgabe kann auf verschiedenen Ebenen beantwortet werden: Die einfachste Antwort ist wohl, dass $\chi_A(A) \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ gilt und $\det(0)$ bei naheliegendster Intrepretation in K. Die beiden Seiten sind also nicht mal die gleiche Sorte Objekt: Der Wechsel geschieht in zweiten Gleichheit beim Einsetzen von A für T: Links steht eine Matrix, rechts ein Element von K.

Aber natürlich darf man A für T in der linken Seite einsetzen und wenn nicht der dritte Term, was kommt denn dann heraus? Es gilt nämlich, wie man leicht nachrechnet (und wir auch schon häufig benutzt haben) für jeden Ringhomomorphismus von kommutativen Ringen $\varphi\colon R \to S$ wirklich, dass in etwas übervorsichter Notation

$$\varphi(\det_{R,n}(B)) = \det_{S,n}(\varphi_*(B))$$

für alle Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(n, n, R)$ richtig ist, wo

$$\varphi_*\colon \mathrm{Mat}(n, n, R) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, n, R), \quad B \longmapsto [(i, j) \mapsto \varphi(B_{i,j})]$$

die Abbildung ist, die φ auf jeden Koeffizienten einer Matrix anwendet (sie ist ein Ringhomomorphismus wie man leicht nachprüft).

Der zweite Summand der Gleichungskette in der Aufgabe ist nun in ebenso übervorsichtiger Notation

$$\mathrm{ev}_A(\det_{K[T],n}(\mathbb{I}_n \cdot T - A))$$

für $\mathrm{ev}_A\colon K[T] \to \mathrm{Mat}(n, n, K)$ den durch A bestimmten Einsetzungshomomorphismus. Aber obige Regel können wir nun erstmal nicht anwenden, da $\mathrm{Mat}(n, n, K)$ kein kommtutativer Ring ist. Dies lässt sich aber auf zwei Arten beheben:

a) Definiert man etwa eine "Determinante" einfach auch für nicht-kommutatives R durch die Leibnizregel

$$\det_{R,n}(B) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)}$$

für $B \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$, so gilt

$$\varphi(\det_{R,n}(B)) = \det_{S,n}(\varphi_*(B))$$

dann auch für nicht-kommutative Ringe, aber etwa einige Rechengesetze gelten nun im allgemeinen nicht mehr (etwa ist bei nichtkommutativen Ringen $\det(A \cdot B) \neq \det(A) \cdot \det(B)$ möglich), sodass man einiges an Vorsicht walten lassen muss.

b) Die bessere Möglichkeit ist zu bemerken, dass das Bild von $\mathrm{ev}_A\colon K[T] \to \mathrm{Mat}(n, n, K)$ ein kommutativer Unterring $S \subseteq \mathrm{Mat}(n, n, K)$ ist und wir obige Formel direkt auf die Abbildung $\mathrm{ev}_A\colon K[T] \to S$ anwenden können. Insbesondere gelten, solange unsere Rechenausdrücke S nicht verlassen doch alle Rechengesetze für Determinanten wie üblich.

Damit erhalten wir also nun

$$\det(\mathbb{I}_n \cdot T - A)](A) = \mathrm{ev}_A(\det_{K[T],n}(\mathbb{I}_n \cdot T - A)) = \det_{S,n}((\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T - A)));$$

insbesondere ist die rechte Seite hier nun ein Element von $S \subseteq \mathrm{Mat}(n, n, K)$ (und nicht von K), beruhigend. Nun sieht es natürlich so aus, also ob $\mathrm{ev}_A(\mathbb{I}_n \cdot T - A) = \mathbb{I}_n \cdot A - A (= 0)$, aber genau hier liegt der etwas weniger naive Fehler begraben: Der Ring $\mathrm{Mat}(n, n, S)$ in dem der $\mathrm{ev}_A(\mathbb{I}_n \cdot T - A)$ enthält, besteht aus $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus S (selbst ein Ring von $n \times n$-Matrizen, aber mit Einträgen in K). Nach den Rechenregeln für die induzierten Homomorphismus haben wir nämlich

$$(\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T - A) = (\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T) - (\mathrm{ev}_A)_*(A)$$

aber die linke ist offenbar eine Diagonalmatrix: $\mathbb{I}_n \cdot T$ ist eine und den Ringhomomorphismus ev_A auf jeden Koeffizienten anzuwenden ändert daran nichts. Dahingegen ist $(\mathrm{ev}_A)_*(A)$ eine Matrix deren Einträge aus Diagonalmatrizen besteht: Per Definition von Einsetzungshomomorphismen ist $\mathrm{ev}_A(A)_{i,j} = \mathbb{I}_n \cdot A_{i,j}$! Ausgeschrieben gelten

$$(\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T) = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathrm{ev}_A)_*(A) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n \cdot A_{1,1} & \mathbb{I}_n \cdot A_{1,2} & \dots & \mathbb{I}_n \cdot A_{1,n} \\ \mathbb{I}_n \cdot A_{2,1} & \mathbb{I}_n \cdot A_{2,2} & \dots & \mathbb{I}_n \cdot A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{I}_n \cdot A_{n,1} & \mathbb{I}_n \cdot A_{n,2} & \dots & \mathbb{I}_n \cdot A_{n,n} \end{pmatrix}$$

was zwei unterschiedliche Elemente von $\mathrm{Mat}(n,n,S) \subseteq \mathrm{Mat}(n,n,\mathrm{Mat}(n,n,K)) = \mathrm{Mat}(n^2,n^2,K)$ sind.

Die Differenz dieser beiden Matrizen verschwindet also nicht: In Wahrheit ist es also, dass dritte Gleichheitszeichen der ursprünglichen Rechnung, dass falsch ist. Dennoch ist die Differenz $(\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T) - (\mathrm{ev}_A)_*(A)$ nicht invertierbar: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt schließlich

$$\det_{S,n}((\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T) - (\mathrm{ev}_A)_*(A)) = 0!$$

Man kann diesen Satz nun tatsächlich auch beweisen indem man eine Basis von S^n konstruiert, die einen Vektor im Kern von $(\mathrm{ev}_A)_*(\mathbb{I}_n \cdot T) - (\mathrm{ev}_A)_*(A)$ enthält! Mit etwas Aufwand lässt sich so eine Basis in der Tat aus dem Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton in der Vorlesung extrahieren, aber das führe ich hier nicht noch aus. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass Polarisierung und Komposition mit der Diagonalabbildung $M \to M \times M$, $m \mapsto (m,m)$ Abbildungen

$$\mathrm{pol}\colon \mathrm{Quad}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M,M,N)$$

und

$$\Delta\colon \mathrm{Bil}_R(M,M,N) \longrightarrow \mathrm{Quad}_R(M,N)$$

mit

$$\mathrm{pol} \circ \Delta = \mathrm{id} + \tau \quad \text{und} \quad \Delta \circ \mathrm{pol} = 2 \cdot \mathrm{id}$$

für jeden kommutativen Ring R und R-Moduln M und N liefert, wo

$$\tau\colon \mathrm{Bil}_R(M,M,N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M,M,N), \quad \psi \longmapsto [(m,m') \mapsto \psi(m',m)]$$

die Variablen vertauscht.

Lösungsvorschlag. Zunächst muss geprüft werden, dass pol und Δ in der Tat Abbildungen wie angegeben definieren, also dass $\mathrm{pol}(q)$ für jedes R-quadratische $q\colon M \to N$ R-bilinear ist und dass $\Delta(b)$ für jedes R-bilineare b R-quadratisch ist.

Zum ersten: Es gelten

$$\begin{aligned}
[\mathrm{pol}(q)](m+m',m'') &= q(m+m'+m'') - q(m+m') - q(m'') \\
&= q(m+m') + q(m+m'') + q(m'+m'') - q(m) - q(m') - q(m'') - q(m+m') - q(m'') \\
&= q(m+m'') - q(m) - q(m'') + q(m'+m'') - q(m') - q(m'') \\
&= [\mathrm{pol}(q)](m,m'') + [\mathrm{pol}(q)](m',m'') \\
[\mathrm{pol}(q)](m \cdot r, m') &= q(m \cdot r + m') - q(m \cdot r) - q(m') \\
&= q(m+m') \cdot r + q(m \cdot r) + q(m') - q(m) \cdot r - q(m') \cdot r - q(m \cdot r) - q(m') \\
&= q(m+m') \cdot r - q(m) \cdot r - q(m') \cdot r \\
&= [\mathrm{pol}(q)](m,m') \cdot r
\end{aligned}$$

gemäß der zweiten und dritten Eigenschaft einer R-quadratischen Abbildung. Und da offenbar $[\mathrm{pol}(q)](m,m') = [\mathrm{pol}(q)](m',m)$ gilt, folgen die Rechengesetze in der hinteren Variable aus denen in der vorderen. Man beachte, dass wir die erste Eigenschaft einer R-quadratischen Abbildung nicht benutzt haben.

Und ähnlich gelten

$$\begin{aligned}
[\Delta(b)](m\cdot r) &= b(m\cdot r, m\cdot r)\\
&= b(m,m)\cdot r\\
[\Delta(b)](m+m'+m'') &= b(m+m'+m'', m+m'+m'')\\
&= b(m,m)+b(m,m')+b(m,m'')+b(m',m)+b(m',m')+b(m',m'')+b(m'',m)+b(m'',m')+b(m'',m'')\\
&= b(m+m', m+m')+b(m+m'', m+m'')+b(m'+m'', m'+m'')-b(m,m)-b(m',m')-b(m'',m'')\\
&= [\Delta(b)](m+m')+[\Delta(b)](m+m'')+[\Delta(b)](m'+m'')-[\Delta(b)](m)-[\Delta(b)](m')-[\Delta(b)](m'')\\
[\Delta(b)](m\cdot r+m'\cdot r') &= b(m\cdot r+m'\cdot r')\\
&= b(m,m)r^2+b(m,m')\cdot rr'+b(m',m)\cdot rr'+b(m',m')\cdot(r')^2\\
&= b(m+m', m+m')\cdot rr'-b(m,m)\cdot rr'-b(m',m')\cdot rr'+b(m,m)\cdot r^2+b(m',m')\cdot r^2\\
&= [\Delta(b)](m+m')\cdot rr'-[\Delta(b)](m)\cdot rr'-[\Delta(b)](m')\cdot rr'+[\Delta(b)](m\cdot r)+[\Delta(b)](m'\cdot r')
\end{aligned}$$

Dann rechnen wir noch die beiden Gleichungen nach:

$$[\mathrm{pol}(\Delta(b))](m,m') = b(m+m', m+m')-b(m,m)-b(m',m') = b(m,m')-b(m',m) = [b+\tau(b)](m,m')$$

und

$$[\Delta(\mathrm{pol}(q))](m) = q(m+m)-q(m)-q(m) = q(m\cdot 2)-q(m)\cdot 2 = q(m)\cdot 4-q(m)\cdot 2 = q(m)\cdot 2 = [q\cdot 2](m),$$

wobei wir hier nun die erste Eigenschaft einer R-quadratischen Form mitverwendet haben. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ist $(V,[-,-])$ ein euklidischer Vektorraum und $X\subset V$ orthogonal. Zeigen Sie: Gilt $0\notin X$ so ist X linear unabhängig.

Lösungsvorschlag. Ist $0=\sum_{x\in X} x\cdot r_x$ für eine Abbildung $r\colon X\to V$ mit $r_x=0$ für fast alle $x\in X$, so wenden wir für ein $y\in X$ das Skalarprodukt an und erhalten

$$0=[y,0]=\left[y,\sum_{x\in X} x\cdot r_x\right]=\sum_{x\in X}[y,x]\cdot r_x=[y,y]\cdot r_y,$$

der letzte Schritt aufgrund der Orthogonalität von X. Aber $[y,y]>0$ da per Annahme an X sicher $y\neq 0$ gilt, und damit muss $r_y=0$ sein. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie ein Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Untervektorraums $V\subseteq\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$v_1=(1,0,0,0),\quad v_2=(1,1,1,0)\quad\text{und}\quad v_3=(1,1,0,2)$$

aufgespannt wird bezüglich des Standardskalarprodukts.

Lösungsvorschlag. Wir folgen dem Gram-Schmidt-Prozess und berechnen $\langle v_1, v_1\rangle = 1$

$$v_2^{(2)}=\mathrm{pr}_{v_1^\perp}(v_2)=v_2-v_1\cdot\frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=(1,0,0,0)-(1,1,1,0)=(0,-1,-1,0)$$

$$v_3^{(2)}=\mathrm{pr}_{v_1^\perp}(v_3)=v_3-v_1\cdot\frac{\langle v_1,v_3\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=(1,0,0,0)-(1,1,0,2)=(0,-1,0,-2),$$

dann $\langle v_2^{(2)}, v_2^{(2)}\rangle = 2$ und

$$v_3^{(3)}=\mathrm{pr}_{(v_2^{(2)})^\perp}(v_3^{(2)})=v_3^{(2)}-v_2^{(2)}\cdot\frac{\langle v_2^{(2)},v_3^{(2)}\rangle}{\langle v_2^{(2)},v_2^{(2)}\rangle}=(0,-1,0,2)-(0,-1,-1,0)\cdot\frac{1}{2}=(0,-1/2,1/2,2),$$

und zuletzt $\langle v_3^{(3)}, v_3^{(3)} \rangle = 9/2$. Damit ist

$$\tfrac{v_1}{|v_1|} = (1,0,0,0), \quad \frac{v_2^{(2)}}{|v_2^{(2)}|} = \left(0, \tfrac{-1}{\sqrt[2]{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt[2]{2}}, 0\right), \quad \frac{v_3^{(3)}}{|v_3^{(3)}|} = \left(0, \tfrac{-1}{3\sqrt[2]{2}}, \tfrac{1}{3\sqrt[2]{2}}, \tfrac{2\sqrt[2]{2}}{3}\right)$$

eine mögliche Orthonormalbasis.

$\square$