Aufgabe 1 (5 Punkte)

Finden sie den Fehler in folgendem "Beweis", dass $\chi_A(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ für einen Körper K gilt: Es gilt

$$\chi_A(A) = [\det(\mathbb{I}_n \cdot T - A)](A) = \det(\mathbb{I}_n \cdot A - A) = \det(0) = 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass Polarisierung und Komposition mit der Diagonalabbildung $M \to M \times M$, $m \mapsto (m, m)$ Abbildungen

$$\mathrm{pol}\colon \mathrm{Quad}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M, M, N)$$

und

$$\Delta\colon \mathrm{Bil}_R(M, M, N) \longrightarrow \mathrm{Quad}_R(M, N)$$

mit

$$\mathrm{pol} \circ \Delta = \mathrm{id} + \tau \quad \text{und} \quad \Delta \circ \mathrm{pol} = 2 \cdot \mathrm{id}$$

für jeden kommutativen Ring R und R-Moduln M und N liefert, wo

$$\tau\colon \mathrm{Bil}_R(M, M, N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M, M, N), \quad \psi \longmapsto [(m, m') \mapsto \psi(m', m)]$$

die Variablen vertauscht.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ist $(V, [-,-])$ ein euklidischer Vektorraum und $X \subset V$ orthogonal. Zeigen Sie: Gilt $0 \notin X$ so ist X linear unabhängig.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie ein Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Untervektorraums $V \subseteq \mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0) \quad \text{und} \quad v_3 = (1, 1, 0, 2)$$

aufgespannt wird bezüglich des Standardskalarprodukts.