

Lineare Algebra II
Klausur

19.02.2025, 10:00

Name, Vorname:**Matrikelnummer:**

1	2	3	4	5	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 120 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 24 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen sie einen dokumentensicheren Stift, in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-5 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Falls Sie nicht im WS 24/25 erfolgreich am Übungsbetrieb der Linearen Algebra II teilgenommen haben, wird Ihre Klausur nicht bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Zu jedem Aufgabenteil gibt es mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten und einen Punkt bei vollständig korrekter Auswahl.

(a) Betrachte $P = T^2 + T + 1 \in \mathbb{Z}/5[T]$. Welche Aussagen stimmen über den Ring $(\mathbb{Z}/5[T])/P$?

- ☒ Er ist ein Integritätsbereich.
 ☒ Er ist ein Körper.
 ☐ Er besitzt 10 Elemente.
 ☒ Er besitzt 25 Elemente.

Erklärung: Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass für einen euklidischen Ring R und $0 \neq f \in R$ eine Nichteinheit äquivalent sind:

- (a) R/f ist ein Integritätsbereich,
 (b) R/f ist ein Körper, und
 (c) f ist irreduzibel

wir haben uns ja sogar überlegt wie man mittels des euklidischen Algorithmus Inverse in R/f bestimmen kann. Und es ist $R = K[T]$ für jeden Körper K (also insbesondere für $K = \mathbb{Z}/5$) ein euklidischer Ring aufgrund der Existenz von Polynomdivision, also prüfen wir, ob $P \in \mathbb{Z}/5[T]$ irreduzibel ist. Da jeder echte Faktor aus Gradgründen linear sein muss, reicht es auf Nullstellen zu prüfen und es gelten

$$P(0)=1, P(1)=3, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=1,$$

sodass P wirklich irreduzibel ist. Und sogar für jeden Integritätsbereich R hat $R[T]/P$ für jedes normierte $F \in R[T]$ vom Grad n die Elemente $[1], [T], \dots, [T^{n-1}]$ als R -Basis. Es ist also $(\mathbb{Z}/5[T])/P$ als $\mathbb{Z}/5$ -Vektorraum 2-dimensional, lässt sich als bijektiv auf $(\mathbb{Z}/5)^2$ abbilden und hat damit $5^2 = 25$ Elemente.

(b) Es sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und $0 \neq a, b, c \in K$. Wann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über K diagonalisierbar?

- ☐ Das stimmt für alle $0 \neq a, b, c \in K$.
 ☐ Genau dann, wenn $a = c$ gilt.
 ☐ Genau dann, wenn b eine Wurzel in K besitzt.
 ☒ Genau dann, wenn ac eine Wurzel in K besitzt.

Erklärung: Laplaceentwicklung um die zweite Zeile oder Spalte liefert $(T-b)(T^2-ac)$ als charakteristisches Polynom. Damit dieses Polynom in Linearfaktoren zerfällt (eine notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit) muss also ac eine Wurzel in K besitzen (das schließt schonmal die linken beiden Antworten aus). Um die obere rechte auszuschließen reicht es etwa das Beispiel $b=1, a=1, c=2$ für $K=\mathbb{R}$ oder etwas ähnliches anzuschauen: Hier hat die Matrix die drei verschiedenen Eigenwerte $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und ist damit diagonalisierbar ohne dass $a=c$ gilt. Damit bleibt nur die vierte Möglichkeit als Antwort. Um zu sehen, dass diese Antwort auch wirklich stimmt (was man natürlich gar nicht wirklich muss um die Aufgabe zu lösen), kann man etwa bemerken, dass die Matrix in der Basis e_2, e_1, e_3 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Als Blockdiagonalmatrix ist diese diagonalisierbar genau dann, wenn ihre Blöcke das sind. Der 1×1 -Block (b) ist offenbar schon diagonal und der 2×2 -Block

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wenn $a \in K$ eine Wurzel $r \in K$ besitzt, genau zwei Eigenwerte $r, -r$ (und diese sind verschieden weil $\text{char}(K) \neq 2$), und ist damit auch diagonalisierbar.

- (c) Über welchen Körpern K sind die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kongruent?

☐ $K = \mathbb{Z}/3$

☒ $K = \mathbb{Z}/5$

☐ $K = \mathbb{R}$

☒ $K = \mathbb{C}$.

Erklärung: Durch Basiswechsel mit einer Diagonalmatrix, kann man immer die Einträge einer Diagonalmatrix um Multiplikation mit einem Quadrat in $K \setminus \{0\}$ verändern ohne die Kongruenzklasse zu wechseln. Besitzt also -1 eine Wurzel $r \in K$ so sind sogar die 1×1 -Matrizen (-1) und (1) kongruent, erst recht die beiden Matrizen in der Aufgabe. Dies ist für $K = \mathbb{C}$ ($r = i$) und $\mathbb{Z}/5$ ($r = 2$) der Fall. Für Körper in denen -1 kein Quadrat ist, haben die beiden Matrizen unterschiedliche Diskriminante, sind also nicht kongruent. Dies trifft bei $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}/3$ zu. Man kann natürlich auch einfach die Klassifikation von symmetrischen Matrizen bis auf Kongruenz aus der Vorlesung bemühen: Je zwei invertierbare symmetrische $n \times n$ -Matrizen über $\mathbb{C}$ sind kongruent, über $\mathbb{R}$ sind sie das genau dann, wenn sie die gleiche Signatur haben, und über allen endlichen Körpern genau dann, wenn sie die gleiche Diskriminante haben.

- (d) Welche der folgenden Matrizen haben $T^3 - T^2 \in \mathbb{Q}[T]$ als Minimalpolynom?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Erklärung: Das Minimalpolynom einer Jordanmatrix J ist das Produkt der Polynome $(T - \lambda)^n$, wobei λ ein Eigenwert von J ist, und n die Größe des größten Jordanblocks zu λ . Wir lesen also ab, dass die vier Matrizen, die alle als Eigenwerte genau $0, 1 \in \mathbb{Q}$ haben als Minimalpolynome (in der Reihenfolge oben links, oben rechts, unten links, unten rechts)

$$T^3(T-1) = T^4 - T^3, \quad T^2(T-1) = T^3 - T^2, \quad T^2(T-1)^2 = T^4 - 2T^3 + T^2, \quad T^2(T-1) = T^3 - T^2$$

besitzen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4, \mathbb{C})$$

inklusive einer Jordanbasis.

Lösungsskizze. Wir bestimmen als erstes das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} T-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & T-1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & T & -1 \\ -1 & -1 & 1 & T-2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} T-2 & 0 \\ -1 & T-1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T-2 \end{pmatrix} \\ &= (T-2)(T-1)(T(T-2)+1) = (T-2)(T-1)(T^2-2T+1) = (T-2)(T-1)^3 \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte 1 und 2 und es gilt $\dim(\text{Hpt}_1(A)) = 3$ und $\dim(\text{Hpt}_2(A)) = 1$. Insbesondere gibt es genau ein Jordankästchen zum Eigenwert 2 und dieses hat Größe 1, und für den Eigenwert 1 haben die Jordankästchen insgesamt Größe 3.

Wir bestimmen also den Eigenraum von 1 mittels Gaußalgorithmus:

$$\text{Eig}_1(A) = \ker(A - \mathbb{I}_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wovon man $\text{Eig}_1(A) = \{(0, s-t, s, t) \in \mathbb{C}^4 \mid s, t \in \mathbb{C}\}$ abliest. Damit wissen wir es gibt 2 Jordankästchen zum Eigenwert 1 und aus Platzgründen muss eines Größe 1×1 haben und eines 2×2 . Die Jordan'sche Normalform von A lautet also

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert schonmal die Hälfte der Punkte.

Machen wir uns nun daran eine Jordanbasis zu bestimmen. Als erstes bestimmen wir hierzu den Hauptraum von 1. Da da größte Jordankästchen zur 1 Größe 2 hat wissen wir $\text{Hpt}_1(A) = \ker((A - \mathbb{I}_4)^2)$. Wir berechnen also

$$(A - \mathbb{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Man liest ab, dass $\text{Hpt}_1(A) = \{(0, s, t, v) \in \mathbb{C}^4 \mid s, t, v \in \mathbb{C}\}$ ab, was etwa e_2, e_3, e_4 als Basis hat.

Dann bestimmen wir die Folge der Bilder (was in diesem Fall nur aus einem einzigen Schritt besteht): Es gilt

$$\text{Im}_{\text{Hpt}_1(A)}(A - \mathbb{I}_4) = \langle (0, 0, 1, 1), (0, 0, -1, -1), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

was offenbar $(0, 0, 1, 1)$ als Basis hat. Wir wählen uns also $(0, 0, 1, 1)$ als ersten Basisvektor, dann ein Urbild hiervon, etwa $(0, 1, 0, 0)$ und füllen dies durch einen weiteren Eigenvektor zu einer Basis von $\text{Hpt}_1(A)$ auf. Hierfür kann man nach Berechnung des Eigenraums etwa $(0, 1, 1, 0)$ benutzen.

Zum Schluss bestimmen wir noch den Eigenraum von 2 mittels Eliminationsalgorithmus:

$$\text{Eig}_2(A) = \ker(A - 2\mathbb{I}_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus man $\text{Eig}_2(A) = \{(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}, s, 0) \in \mathbb{C}^4 \mid s \in \mathbb{C}\}$ abliest, was etwa $(1, 1, 2, 0)$ als Basis hat.
 Insgesamt erhalten wir also etwa

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3, \mathbb{Z}).$$

Lösung. Man kann einfach dem Algorithmus der Vorlesung folgen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I, III-4I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II-I, III-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Hier hat man zwar eine Diagonalmatrix erreicht, aber da $3 \nmid 10$ ist dies noch nicht die Elementarteilerform. Nun kann man sich entweder an das Beispiel aus der Vorlesung erinnern, dass in so einem Fall immer der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache auftauchen, oder einfach weiterrechnen, was ebenfalls

$$\xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-3II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-3II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+10II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

□

und damit 1, 1, 30 als Elementarteiler liefert.

Wählen Sie eine der beiden folgenden Aufgaben aus:

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von 2×2 -Matrizen über $\mathbb{Z}/p$ für $p \in \mathbb{N}$ prim. Bestimmen Sie ebenfalls wie viele dieser Klassen Diagonalmatrizen enthalten und wie viele Jordanmatrizen enthalten.

Lösung. Aufgrund der Frobenius'schen Normalform sind die Ähnlichkeitsklassen von $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K eindeutig durch die invarianten Faktoren bestimmt, die eine Teilerkette von nicht konstanten, normierten Polynomen in $\mathbb{K}[T]$ bilden, deren Produkt Grad n hat. Im Falle $n = 2$ kann so eine Teilerkette aus Gradgründen natürlich höchstens Länge 2 haben und entweder besteht sie nur aus einem normierten Polynom F vom Grad 2, oder ist von der Form (F, F) für ein normiertes lineares Polynom F .

Vom zweiten Typ gibt es genau die Möglichkeiten $T + a$ für $a \in K$, also bei $K = \mathbb{Z}/p$ genau p Stück. Und vom zweiten Typ genau $T^2 + aT + b$ mit $a, b \in K$, wofür es bei $K = \mathbb{Z}/p$ genau p^2 Möglichkeiten gibt. Insgesamt gibt es also genau $p^2 + p$ Ähnlichkeitsklassen.

Diagonalmatrizen mit genau einem Eigenwert gibt es offenbar ebenfalls genau p Stück und Diagonalmatrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerten gibt es $p(p-1)$ Stück, aber natürlich sind

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ähnlich! Es gibt also $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ Ähnlichkeitsklassen und damit

$$p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{(p+1)p}{2} = \binom{p+1}{2}$$

Ähnlichkeitsklassen von Diagonalmatrizen. Die einzigen zusätzlichen Jordanformen sind von der Form

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

wovon es offenbar nochmal p Möglichkeiten gibt. Es gibt also insgesamt

$$p + \frac{(p+1)p}{2} = \frac{(p+3)p}{2} = 2p + \binom{p}{2}$$

Ähnlichkeitsklassen von Jordanmatrizen. □

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Ist $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ normal mit $\langle A \cdot v, v \rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$, so folgt $A = 0$.

Finden Sie ein Gegenbeispiel zu:

2. Ist $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ normal mit $\langle A \cdot v, v \rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, so folgt $A = 0$.

Hinweis: Gegenbeispiele gibt es schon für $n = 2$.

Lösung. 1. Nach dem komplexen Spektralsatz ist A unitär diagonalisierbar, sagen wir etwa mit einer unitären Eigenbasis $b_1, \dots, b_n$ etwa mit Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ zu b_i . Aber dann gilt

$$\lambda_i = \lambda_i \cdot \langle b_i, b_i \rangle = \langle b_i \cdot \lambda_i, b_i \rangle = \langle A \cdot b_i, b_i \rangle = 0$$

für jeden der Eigenwerte λ_i . Aber eine diagonalisierbare Matrix mit einzigem Eigenwert 0 verschwindet.

2. Die Rotation um $\pi/2$ ($= 90^\circ$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$$

ist ein (orthogonales, ergo normales!) Gegenbeispiel. □

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. A ist normal.
2. Der Realteil und der Imaginärteil von A kommutieren.
3. A ist orthogonal diagonalisierbar; mit anderen Worten es gibt eine orthogonale Matrix $P \in O(n)$, derart dass $P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

Proof. Man kann etwa einen Ringschluss versuchen, wobei immer zu zeigen, dass 3. folgt, der einzig schwierige Teil ist. Zum Beispiel:

1. $\Leftrightarrow$ 2. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass sich jede Matrix $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ eindeutig in der Form $A = B + C i$ mit hermiteschen $B, C \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ schreiben lässt (nämlich $B = (A + A^\dagger)/2$ und $C = (A - A^\dagger)/(2i)$) und dass A genau dann normal ist wenn, B und C kommutieren. Und sicherlich haben wir ebenfalls für jede Matrix

$$A = \text{Re}(A) + \text{Im}(A) \cdot i.$$

Aber wenn A symmetrisch ist, wie in der Aufgabe angenommen, so sind auch $\text{Re}(A), \text{Im}(A) \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ symmetrisch, und symmetrische, *reelle* Matrizen sind natürlich hermitesch. Das heißt diese Zerlegung ist die aus dem Normalitätskriterium.

2. $\Rightarrow$ 3. Nach dem reellen Spektralsatz sind $\text{Re}(A)$ und $\text{Im}(A)$ als reelle Diagonalmatrizen orthogonal diagonalisierbar. Und da sie kommutieren sind sie nach einem weiteren Satz der Vorlesung dann sogar simultan orthogonal diagonalisierbar (das unitäre Analog war genau die Methode, die ich in der Vorlesung gewählt hatte um den komplexen aus dem hermiteschen Spektralsatz herzuleiten). Ist dann jedenfalls $b_1, \dots, b_n$ eine simultane orthogonale Eigenbasis des $\mathbb{R}^n$, mit Eigenwerten λ_j für $\text{Re}(A)$ und μ_j für $\text{Im}(A)$, so ist b auch eine Basis des $\mathbb{C}^n$ (über $\mathbb{C}$), und es gilt

$$A \cdot b_j = (\text{Re}(A) + \text{Im}(A) \cdot i) \cdot b_j = \text{Re}(A) \cdot b_j + \text{Im}(A) \cdot b_j \cdot i = b_j \cdot \lambda_j + b_j \cdot \mu_j \cdot i = b_j \cdot (\lambda_j + \mu_j \cdot i)$$

mit anderen Worten die b_i bilden auch eine Eigenbasis von A . Die Basiswechselmatrix P zwischen b und der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ leistet also das gewünschte.

3. $\Rightarrow$ 1. Nach dem komplexen Spektralsatz ist A normal genau dann, wenn A unitär diagonalisierbar ist. Da orthogonale Matrizen insbesondere unitär ist nichts weiter zu tun.

□