Was hammer gemacht?

Kapitel 5 Polynome

- Polynome $\neq$ polynomielle Funktionen für endliche Ringe.
- Polynomdivision und euklidische Algorithmus zum Bestimmen größter gemeinsamer Teiler $(*)$

Satz $F, G \in K[T]$, K Körper

$$\langle F, G \rangle_{K[T]} = \langle \operatorname{ggT}(F,G) \rangle$$

ist das Polynom kleinsten Grades in $\langle F, G \rangle_{K[T]}$.

$(*)$ Bestimmen von Inversen in $\mathbb{Z}/n$ und $K[T]/F$

Wann haben Elemente in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p$ 2te-Wurzeln

(*)

(-1) hat Wurzel in $\mathbb{Z}/p$ falls $p \equiv 1 \ (4)$ (oder $p=2$!)

- <u>Formale Ableitungen</u>

$F \in K[T]$

$\mathrm{char}(K) = 0$: $x \in K$ ist eine n-fache NST von F $\iff$ x ist Nullstelle von $F, dF, d^2F, \dots, d^{n-1}F$ aber nicht d^nF.

- F und dF teilerfremd

immer $\Downarrow$ $\Uparrow$ K alg. abg. $(K=\mathbb{C})$.

alle NST von F sind einfach

Kapitel 6 Diagbarkeit

- Eigenwerte + Eigenvektoren

- <u>1. Diagbarkeit</u>

$A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$

$\circledast$ $n = m_{\lambda_1}(A) + \dots + m_{\lambda_k}(A)$

wobei $m_{\lambda_i}(A) = \dim(\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A))$ "geometrische Vielfachheit".

- charakteristisches Polynom.

$\chi_A = \det(\mathbb{I}_n \cdot T - A)$.

Eigenwerte von A = NST von χ_A.

$\circledast$ Basen der Eigenräume liefern zusammen eine Eigenbasis

$n = m_{T-\lambda_1}(\chi_A) + \dots + m_{T-\lambda_k}(\chi_A)$

2. Diag'barkeit

$\circledast$ A diag'bar $\Longleftrightarrow$ χ_A zerfällt in Linearfaktoren

$+\ m_{\lambda_i}(A) = m_{T-\lambda_i}(\chi_A)$

algebraische Vielfachheit

es gilt immer $\leq$

χ_A zerfällt in <u>einfache</u> Linearfaktoren

$\Longrightarrow$ A diag'bar

- Minimalpolynom von A ((*) bestimmen!)

3. Diag krit

A diagbar $\Leftrightarrow$ $\min_A$ zerfällt in einfach linear faktore

Insbesondere $K = \mathbb{C}$

A diagbar $\Leftrightarrow$ $\min_A$ und $\min_A'$ sind teilerfremd

Thm (Cayley-Hamilton)

$\min_A \mid \chi_A$ und $\chi_A \mid \min_A^n$

insbesondere haben beide die gleich Primfaktoren und Nullstellen

Kapitel 7. Die Spektralsätze

Bilinearformen sind zu Konjugation
- wie Endomorphismen zu Ähnlichkeit (Basiswechselgesetze).
- Gram-Schmidt-Verfahren

(*) Das Bestimmen von Orthogonalbasen

- $(V, [\cdot,\cdot])$ endlich $(v_1, \dots, v_n)$

(*) → bestimme Orthonormalbasis von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$

↓

Thm (Jacobi) $\operatorname{char}(K) \neq 2$ so ist jede symmetrische Matrix konjugiert zu Diagmatrix

2.B. **Sylvester**

jede symm. über $\mathbb{R}$ ist kongruent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- jede sym. über $\mathbb{C}$ ist kong.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- jede symm. über $\mathbb{Z}/p$ ist kong

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & q & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ wo $q \in \mathbb{Z}/p \setminus \{0\}$ beliebig.

Thm (Spektralsätze) $K = \mathbb{R}$

A symmetrisch $\Leftrightarrow$ A diagbar mit orthonormal Eigenbasis

$(A = A^t)$

$K = \mathbb{C}$

A hermitesch $\Leftrightarrow$ A diagbar mit reellen Eigenwerten und unitärer Eigenbasis

$(A = \overline{A^t})$

A normal $\Leftrightarrow$ A diagbar mit unitärer Eigenbasis

$(A \cdot \overline{A^t} = \overline{A^t} \cdot A)$

Orthonormal/unitäre Basen der Eigenräume fügen sich zu orthonormalen/unitären Eigenbasen zusammen.

! Über $\mathbb{R}$ heißt eine Matrix orthogonal wenn ihre Zeilen/Spalten orthonormal sind. !

TSCHULLIGUNG.

(nicht meine Schuld)

Kapitel 8 Normalformen

Primärzerlegung

$$K^n = \ker\left(P_1^{n_1}(A)\right) \oplus \ldots \oplus \ker\left(P_k^{n_k}(A)\right)$$

wobei $\min_A = P_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{n_k}$ Primfaktorzerlegung.

Für linear P_i heißen diese Kerne

$T - \lambda_i$

die <u>Haupträume</u> zu den λ_i.

<u>Thm</u>: $\dim\left(\mathrm{Hpt}_{\lambda_i}(A)\right) = m_{T-\lambda_i}(\chi_A)$

(allgemein $\dim\ker\left(P_i^{n_i}(A)\right) = \deg(P_i) \cdot m_{P_i}(\chi_A)$).

Jordan Normalform

<u>Thm</u> Es sind äquiv

- A ist ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix
- $\min_A$ zerfällt in Linearfaktore
- χ_A zerfällt in Linearfaktoren
- $u = m_{T-\lambda_1}(A) + \dots + m_{T-\lambda_k}(A)$
- $K^n = \mathrm{Hpt}_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hpt}_{\lambda_k}(A)$
- A ist ähnlich zu einer Jordanmatrix.

(*) Bestimmen einer Jordanform und einer Jordanbasis.

Frobeniusnormalform

K Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$

$\Rightarrow$ $A \sim$ Frobeniusmatrix

/ eindeutig

$$\begin{pmatrix} C_{F_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{F_k} \end{pmatrix}$$

und $F_i \mid F_{i+1}$ normierte nicht konst. Polynome.

"invariante Faktoren"

und

$F_k = \min_A$ $\qquad$ $F_1 \cdot \ldots \cdot F_k = \chi_A$

F_k sind die nicht konst. Elementarteiler von $\mathbb{1}_n T - A \in \mathrm{Mat}(n,n,K[T])$.

Elementarteilersatz

$A \in Mat(n, n, R)$ $\quad$ R euklidisch

$\exists B, C$ invertierbar mit

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & a_n & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

A, A' ähnlich $\Leftrightarrow$ gleiche Invariante Faktoren

für eine Teilerkette $a_i \mid a_{i+1}$

(*) Elt teiler bestimmen für $\mathbb{Z}$

Für $K[T]$ wird der Algorithmus in den Klausuren nicht vorkommen.