

Was haben wir gemacht?

Kapitel 5 Polynome

- Polynome $\neq$ polynomielle Funktionen für endliche Ringe.

- Polynomdivision und euklidischer Algorithmus zum Bestimmen größter gemeinsamer Teiler

Satz $F, G \in K[T]$, K Körper

$$\langle F, G \rangle_{K[T]} = \langle \text{ggT}(F, G) \rangle$$

ist das Polynom ¹kleinster Grades in $\langle F, G \rangle_{K[T]}$.

(*) Bestimmen von Inversen in $\mathbb{Z}/n$
und $K[T]_f$

Voraussetzen Elemente in
 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p$ 2te-Wurzeln

(*)

(-1) 2te Wurzel in $\mathbb{Z}/p$
 falls $\left. \begin{array}{l} p \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{(oder } p=2) \end{array} \right\}$

• Formale Ableitungen $F \in K[T]$

$\text{disc}(K) = 0$:

$x \in K$ ist eine
 n-fache NST von

$F \Leftrightarrow x$ ist

Nullstelle von $F, dF, d^2F, \dots, d^{n-1}F$

aber nicht $d^n F$.

• F und dF teilerfremd

immer $\Downarrow$

$\Uparrow K$ alg. alg.
 $(K=\mathbb{C})$

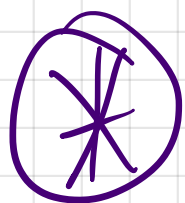
alle NST von F sind einfach

Kapitel 6 Diagonalisierbarkeit

- Eigenwerte + Eigenvektoren

- 1. Diagonal

$$A \in \text{Mat}(n, n, K)$$



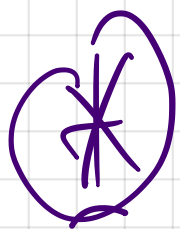
$$u = u_{\lambda_1}(A) + \dots + u_{\lambda_k}(A)$$

wobei $u_{\lambda_i}(A) = \dim(\text{Eig}_{\lambda_i}(A))$
"geometrische Vielfachheit"

- charakteristisches Polynom.

$$\chi_A = \det(\mathbb{I}_n \cdot T - A).$$

$$\text{Eigenwerte von } A = \text{NST von } \chi_A.$$



Basen der Eigenräume

liefern zusammen eine Eigenbasis

$$h = m_{T-\lambda_1}(x_A) + \dots + m_{T-\lambda_k}(x_A)$$

2. Die Witt

⑧ A diagonal $\Leftrightarrow \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren

$$+ m_{\lambda_i}(A) = m_{T-\lambda_i}(x_A)$$

es gilt immer $\leq$
 algebraische Vielfachheit

χ_A zerfällt in einfache Linearfaktoren
 $\Rightarrow A$ diagonal

- Minimalpolynom von A
 $(\textcircled{\ast})$ bestimmen!

3. Diagonal

A diagonal $\Leftrightarrow \chi_A$

insbesondere

$K = \mathbb{Q}$

erfüllt in
einfach
linearfaktore

A diagonal $\Leftrightarrow \chi_A$ und χ_A
sind teilerfremd

Thm (Cayley-Hamilton)

$\chi_A \mid \chi_A$ und $\chi_A \mid \chi_A$

insbesondere haben beide die gleichen
Nullstellen

Kapitel 7. Die Spektraltheorie

- Bilinearformen sind zu Konjugation
• wie Endomorphismen zu Ähnlichkeit
(Basiswechselgesetze).

• Gram-Schmidt-Verfahren

(*) Das Bestimmen von
Orthogonalbasen

- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endlich $(v_1, \dots, v_n)$

(*) $\rightarrow$ bestimme Orthonormalbasis von
 $\downarrow$
 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$

Theorem (Jacobi) $\text{char}(K) \neq 2$ so ist
jede symmetrische Matrix konjugiert zur Diagonalmatrix

Z.B. Sylvester

jeder sym. $n \times n$ $\mathbb{R}$ ist
kongruent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

jeder sym. $n \times n$ $\mathbb{C}$ ist
kong

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

jeder sym. $n \times n$ $\mathbb{Q}/p$ ist kong
 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$ $\cup$ $q \in \mathbb{Q}/p \setminus \{0\}$ beliebig.

Thm (Spektralsatz) $K = \mathbb{R}$

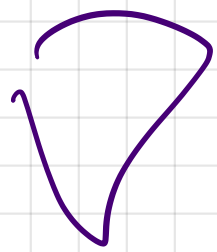
A symmetrisch $\Leftrightarrow A$ diagonal
($A = A^t$) mit orthonormal
Eigenbasis

$K = \mathbb{C}$

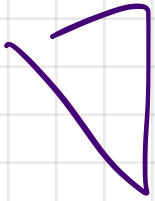
A hermitesch $\Leftrightarrow A$ diagonal mit
($A = \overline{A}^t$) reellen Eigenwerten
und unitärer
Eigenbasis

A normal $\Leftrightarrow A$ diagonal mit
($A \cdot \overline{A}^t = \overline{A}^t \cdot A$) unitärer Eigenbasis

Orthonormal / unitäre Basen der Eigenräume
fügen sich zu orthonormalen / unitären
Eigenbasis zusammen.



über $\mathbb{R}$ heißt eine



Matrix

orthogonal

Wenn ihre Zeilen / Spalten
orthogonal sind.

TSCHULLUNG.

(nicht meine Schuld)

Kapitel 8 Normalformen

Primärzerlegung

$$K^n = \ker(P_1^{u_1}(A)) \oplus \dots \oplus \ker(P_k^{u_k}(A))$$

wobei $\min_A = P_1^{u_1} \cdot \dots \cdot P_k^{u_k}$ Primfaktorzerlegung

Für linear $\underbrace{P_i}_{T-\mathbb{Z}_i}$ heißen diese Kerne

die Haupträume zu den $\mathbb{Z}_i$.

Thm: $\dim(\text{Hpt}_{\mathbb{Z}_i}(A)) = u_{T-\mathbb{Z}_i}(\chi_A)$
(allgemeiner $\dim \ker(P_i^{u_i}(A)) = \deg(P_i) \cdot u_{P_i}(\chi_A)$)

Jordan Normalform

Thm Es sind äquiv

- A ist ähnlich zu einer Dreiecksmatrix
- $\min_A$ erfüllt in Linearformen
- χ_A erfüllt in Linearformen
- $u = u_{T-\lambda_1}(A) + \dots + u_{T-\lambda_k}(A)$
- $K^n = H_{p\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus H_{p\lambda_k}(A)$
- A ist ähnlich zu einer Jordan matrix.

(*) Bestimmen einer Jordanform und einer Jordانبasis.

Frobenius normal form

K Körper, $A \in \text{Mat}(n, n, K)$

$\rightarrow A \sim$ Frobenius matrix
/ endlich

$$\begin{pmatrix} C_{F_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{F_k} \end{pmatrix}$$

und $F_1 \mid F_{i+1}$ normale
nicht konst. Polynome.
"inversible Faktoren"

und

$$F_k = \min_A$$

$$F_1 \cdot \dots \cdot F_k = \chi_A$$

F_k sind die ^{nicht konst.} Elementarteiler von
 $\mathbb{K}[T] - A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{K}[T])$.

Elementarstufen

$$A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$ endlich

$\exists B, C$ invertierbar mit

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

A, A' ähnlich
 $\Leftrightarrow$ gleiche
Stufenform
Folgerung

für eine Teilmenge $a_i \mid a_{i+1}$

(*) Elt teiler bestimmen für $\mathbb{Z}$

Für $\mathbb{K}[\lambda]$ wird der Algorithmus
den Klammern nicht vorhanden.