Fabian Hebestreit

Universität Bielefeld
WS 24/25

Lineare Algebra II
Nachklausur

25.03.2025, 12:00

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 120 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 24 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen sie einen dokumentensicheren Stift, in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-5 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Falls Sie nicht im WS 24/25 erfolgreich am Übungsbetrieb der Linearen Algebra II teilgenommen haben, wird Ihre Klausur nicht bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Zu jedem Aufgabenteil gibt es mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten und es gibt einen Punkt bei vollständig korrekter Auswahl.

(a) Wür welche $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Q})$$

diagonalisierbar?

- ☒ Für $a \neq 0$ und b, c beliebig.
- ☐ Für $b \neq 0$ und a, c beliebig.
- ☐ Für $c \neq 0$ und a, b beliebig.
- ☒ Für $a = b = c = 0$.

Erklärung: *Das charakteristische Polynom lautet $(T-a)T^2$, sodass die Eigenwerte 0 und a lauten. Offenbar hat die Matrix Rang 1, wenn einer der Einträge in der ersten Zeile nicht verschwindet, also zweidimensionalen Kern (was auch der Eigenraum zu 0) ist. Ist also $a \neq 0$ gibt es zwei Basisvektoren zum Eigenwert 0 und einen zum Eigenwert a, und damit ist die Matrix nach dem ersten Kriterium diagonalisierbar (also ein Kreuzchen oben links). Ist $a = 0$, aber $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ so gibt es zwei Eigenvektoren zum einzigen Eigenwert 0 und die Matrix ist nicht diagonalisierbar (also keine Kreuzchen oben rechts und unten links). Verschwinden alle Einträge so ist die Matrix natürlich diagonal, (also ein Kreuzchen unten rechts).*

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})$$

definit?

- ☒ Für alle $a < -1$.
- ☐ Für alle $-1 < a < 0$.
- ☐ Für alle $0 < a < 1$.
- ☒ Für alle $1 < a$.

Erklärung: *Eine symmetrische Matrix ist definit genau dann, wenn ihre Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind. Das charakteristische Polynom obiger Matrix lautet $(T-a)^2 - 1$ und damit sind die Eigenwerte $a+1$ und $a-1$. Wegen $a-1 < a+1$ sind beide positiv, genau dann, wenn $0 < a-1$ und beide negativ genau dann, wenn $a+1 < 0$.*

(c) Über welchen Körpern K sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(2,2,K)$ kongruent?

- ☐ $K = \mathbb{Z}/3$
- ☐ $K = \mathbb{Z}/5$
- ☒ $K = \mathbb{R}$
- ☒ $K = \mathbb{C}$.

Erklärung: *Über endlichen Körpern sind zwei invertierbare symmetrische Matrizen gleicher Größe genau dann kongruent, wenn ihre Diskriminanten übereinstimmen, mit anderen Worten, wenn der Quotient ihrer Determinanten ein Quadrat ist. Aber $\frac{-2}{-1} = 2$ ist weder in $\mathbb{Z}/3$ noch in $\mathbb{Z}/5$ ein Quadrat wie man leicht (etwa durch einfaches ausprobieren) überprüft. Über $\mathbb{R}$ sind zwei invertierbare symmetrische Matrizen gleicher Größe genau dann kongruent, wenn sie die gleiche Signatur haben, und diese ist 0 in beiden Fällen. Und über $\mathbb{C}$ sind je zwei invertierbare symmetrische Matrizen gleicher Größe kongruent.*

(d) Wie viele Ähnlichkeitsklassen von reellen Matrizen mit charakteristischem Polynom $T^4 - T^3 \in \mathbb{R}[T]$ gibt es?

- ☐ 2
- ☒ 3
- ☐ 4
- ☐ ∞

Erklärung: *Ist A eine solche Matrix so hat A jedenfalls Größe* 4×4 *und besitzt, da* $T^4-T^3 = T^3(T-1)$ *vollständig in Linearfaktoren zerfällt eine Jordan'sche Normalform mit Eigenwerten* 0 *und* 1. *Sie hat einen Block der Größe* 1 *zum Eigenwert* 1 *und die Gesamtgröße der Blöcke zum Eigenwert* 0 *ist* 3 *(diese Gesamtgröße der Blöcke zu einem Eigenwert ist ja die Dimension des Hauptraumes und damit gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts). Hierfür gibt es die drei Möglichkeiten*

- *ein Block der Größe* 3,
- *ein Block der Größe* 2 *und ein Block der Größe* 1,
- *drei Blöcke der Größe* 1.

Da die Anzahl und Größe der Blöcke die Ähnlichkeitsklasse einer Matrix festlegt, liegt A also in einer von genau 3 *Ähnlichkeitsklassen.*

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Finden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R}).$$

eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}(3)$, derart dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungsskizze. Wir berechnen das charakteristische Polynom: Es lautet

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} T & -1 & -1 \\ -1 & T & -1 \\ -1 & -1 & T \end{pmatrix} = T^3 - 1 - 1 - T - T - T = T^3 - 3T - 2$$

nach der Regel von Sarrus. Hoffen wir dann auf rationale Nullstellen, so haben wir $-2, -1, 1, 2$ zu prüfen und finden glücklicherweise, dass hiervon genau -1 und 2 Nullstellen sind. Um das Polynom zu faktorisieren berechnen $d\chi_A = 3T^2 - 3$, wovon offenbar -1 immer noch eine Nullstelle ist. Also ist -1 eine doppelte Nullstelle von χ_A, sodass wir $\chi_A = (T-2)(T+1)^2$ erhalten. Eigenwerte sind also 2 und -1.

Als nächstes bestimmen wir die Eigenräume. Fangen wir mit dem kleineren an:

$$\mathrm{Eig}_2(A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was uns $\mathrm{Eig}_2(A) = \{(z,z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ liefert. Als Basis hat dies etwa $(1,1,1)$. Und dann:

$$\mathrm{Eig}_{-1}(A) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was $\mathrm{Eig}_{-1}(A) = \{(-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ liefert. Als Basis hat dies etwa $(-1,1,0)$ und $(-1,0,1)$.

Jetzt wenden wir noch den Gram-Schmid-Prozess an um eine orthonormale Eigenbasis zu erhalten. Da der erste Vektor ja schon senkrecht auf den anderen beiden steht (Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind bei normalen, insbesondere bei symmetrischen reellen Matrizen automatisch orthogonal!), brauchen wir den ersten nur zu normieren und erhalten

$$(1,1,1) \cdot \frac{1}{|(1,1,1)|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Für die anderen beiden rechnen wir

$$(-1,1,0) - (-1,0,1) \cdot \frac{\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle}{\langle(-1,0,1),(-1,0,1)\rangle} = (-1,1,0) - (-1,0,1) \cdot \frac{1}{2} = (-1/2, 1, -1/2)$$

was nun senkrecht auf $(-1,1,0)$ steht. Dann noch normieren:

$$(-1,1,0) \cdot \frac{1}{|(-1,1,0)|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{und} \quad (-1,2,-1) \cdot \frac{1}{|(-1,2,-1)|} = (-1/\sqrt{6}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$$

Also leistet

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

das gewünschte. □

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$

diagonalisierbar ist.

Lösung. Da es sich um die Begleitmatrix des Polynoms $F = T^3 - 3T^2 - 6T - 3 \in \mathbb{C}[T]$ handelt, wissen wir, dass sowohl charakteristisches als auch Minimalpolynom der Matrix gerade F sind. Hoffen wir auf rationale Nullstellen, so müssen wir $-3, -1, 1, 3$ prüfen und finden aber

$$F(-3) = -39, F(-1) = -1, F(1) = -11 \quad \text{und} \quad F(3) = -21.$$

Wir müssen also anders vorgehen, als die Eigenwerte direkt auszurechnen: Hierfür gibt es das dritte Diagonalisierbarkeitskriterium: Wir müssen nur prüfen, ob das Minimalpolynom F vollständig in Linearfaktoren zerfällt, die alle einfach sind. Die erste Aussage gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra sogar für jedes nichtkonstante komplexe Polynom und die Nullstellen von F sind einfach genau dann, wenn F und $\mathrm{d}F$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wir berechnen also $\mathrm{d}F = 3T^2 - 6T - 6$. Von hier aus gibt es nun mehrere Möglichkeiten: Die sichere Methode, die auch bei größeren Matrizen immer funktioniert wendet einfach den euklidischen Algorithmus an. Es gilt

$$F = \tfrac{1}{3}T \cdot \mathrm{d}F - T^2 - 4T - 3 \quad \text{und} \quad -T^2 - 4T - 3 = \tfrac{-1}{3} \cdot \mathrm{d}F - 6T - 5$$

und damit

$$F = \left(\tfrac{1}{3}T - \tfrac{1}{3}\right) \cdot \mathrm{d}F - 6T - 5,$$

was die erste Division mit Rest ist. Für die zweite berechnet man

$$\mathrm{d}F = \tfrac{-1}{2}T \cdot (-6T - 5) + \tfrac{-17}{2}T - 6 \quad \text{und} \quad \tfrac{-17}{2}T - 6 = \tfrac{17}{12} \cdot (-6T - 5) + \tfrac{17 \cdot 5 - 6 \cdot 12}{6}$$

und erhält

$$\mathrm{d}F = \left(\tfrac{-1}{2}T + \tfrac{17}{12}\right) \cdot (-6T - 5) + \tfrac{17 \cdot 5 - 6 \cdot 12}{6}.$$

Bleibt nur zu beobachten, dass $17 \cdot 5 - 6 \cdot 12 \neq 0$ gilt (etwa weil 5 ein Primfaktor links, aber nicht rechts ist oder weil $17 \cdot 5 = 105 \neq 72 = 6 \cdot 12$), sodass der Rest als konstantes Polynom in $\mathbb{C}[T]$ eine Einheit ist. Damit sind F und $\mathrm{d}F$ teilerfremd, also alle Nullstellen von F einfach und die Matrix diagonalisierbar.

Alternativ kann man die zweite Polynomdivision vermeiden, in dem man beobachtet, dass es eine gemeinsame Nullstelle von F und $\mathrm{d}F$ auch eine Nullstelle des Rests bei der Division von diesen beiden sein muss. Dieser Rest ist $-6T - 5$, mit anderen Worten $5/6$ ist der einzige Kandidat. Aber

$$\mathrm{d}F = 3T^2 - 6T - 6 = 3(T^2 - 2T - 2) = 3((T-1)^2 - 3)$$

hat $\sqrt{3} + 1$ und $-\sqrt{3} + 1$ als einzige Nullstellen. Also ist jede Nullstelle von F einfach und die Matrix diagonalisierbar.

Und man kann den euklidischen Algorithmus auch gänzlich vermeiden indem man diese beiden Nullstellen von $\mathrm{d}F$ einfach in F einsetzt

$$F(\sqrt{3} + 1) = -11 - 6\sqrt{3} \quad \text{und} \quad F(-\sqrt{3} + 1) = -11 + 6\sqrt{3}$$

und bemerkt dass diese Zahlen beide negativ sind: Offenbar gilt das für die linke und um zu sehen, dass $6\sqrt{3} < 11$ ist, quadriert man und erhält

$$(6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 = 108 < 121 = 11^2.$$

Mit etwas Analysis (oder einer Kurvendiskussion wie in der Schule) lernt man hieraus auch sofort noch, dass F genau eine (einfache!) Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt und damit zwei weitere (zueinander konjugierte) komplexe Nullstellen. □

Wählen Sie eine der beiden folgenden Aufgaben aus:

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ eine Matrix mit $A^k = \mathbb{I}_n$ für ein $0 \neq k \in \mathbb{N}$, so ist A diagonalisierbar.

Lösung. Hier sind drei mögliche Lösungen (in aufsteigender Komplexität):

1. Per Annahme gilt für $F = T^k - 1$ offenbar $F(A) = 0$. Damit ist das Minimalpolynom von A ein Teiler von F. Aber eine komplexe Matrix ist diagonalisierbar genau dann, wenn ihr Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen hat. Aber schon F hat keine: Seine Nullstellen sind genau die k-ten Einheitswurzeln

$$\cos\left(\tfrac{2\pi j}{k}\right) + i \sin\left(\tfrac{2\pi j}{k}\right) \in \mathbb{C}$$

   für $0 \leq j < k$, wovon es ja genau k Stück gibt.

2. Man betrachte die Jordan'sche Normalform von A. Dann ist A diagonalisierbar genau dann, wenn alle ihre Blöcke Größe 1 haben. Hat einer Größe mindestens 2 nehme man sich die ersten beiden Vektoren aus einer Jordanbasis an der Stelle eines solchen Blocks (etwa zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$), nennen wir sie $w, v \in \mathbb{C}^n$. Per Definition sind dann v, w linear unabhängig und es gelten

$$A \cdot v = v \cdot \lambda + w \quad \text{und} \quad A \cdot w = w \cdot \lambda.$$

   Eine kleine Induktion liefert

$$A^m \cdot v = v \cdot \lambda^m + w \cdot m \cdot \lambda^{m-1},$$

   für alle $m \in \mathbb{N}$: Für $m = 1$ ist das die Definition und für den Induktionsschritt rechnen wir

$$A^{m+1} \cdot v = A \cdot (v \cdot \lambda^m + w \cdot m \cdot \lambda^{m-1}) = v \cdot \lambda^{m+1} + w \cdot \lambda^m + w \cdot m \cdot \lambda^m = v \cdot \lambda^{m+1} + w \cdot (m+1) \cdot \lambda^m.$$

   Aber damit gilt dann

$$v = \mathbb{I}_n \cdot v = A^k \cdot v = v \cdot \lambda^k + w \cdot k \cdot \lambda^{k-1}$$

   was wegen der linearen Unabhängigkeit von v und w erzwingt, dass $k \cdot \lambda^{k-1} = 0$ gilt, und damit wegen $k \neq 0$ schon $\lambda = 0$, und damit $v = 0$. Widerspruch.

   Also haben alle Blöcke in der Jordannormalform von A Größe 1 und damit ist A diagonalisierbar.

3. Nach dem Satz über die Primärzerlegung ist A diagonalisierbar genau dann, wenn jeder Hauptvektor von A schon ein Eigenvektor von A ist. Hierfür reicht es die Inklusion

$$\ker((A - \mathbb{I}_n \cdot \lambda)^2) \subseteq \ker(A - \mathbb{I}_n \cdot \lambda)$$

   für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ nachzuweisen. Ist aber $u \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zu λ gilt

$$u = \mathbb{I}_n \cdot = A^k \cdot u = \lambda^k \cdot u$$

   und damit $\lambda^k = 1$ (was wir im ersten Beweis durch Betrachtung des Minimalpolynoms erhalten hatten).

   Ist nun $v \in \ker((A - \mathbb{I}_n \cdot \lambda)^2)$, so gilt per Definition $(A - \mathbb{I}_n \cdot \lambda)^2 \cdot v = 0$ oder äquivalent

$$A^2 \cdot v = 2 \cdot A \cdot v \cdot \lambda - v \cdot \lambda^2$$

   Eine kleine Induktion liefert diesmal

$$A^m \cdot v = (1 - m) \cdot v \cdot \lambda^m + m \cdot A \cdot v \cdot \lambda^{m-1}:$$

(setzt man $w = A \cdot v - v \cdot \lambda$ ist dies übrigens die gleiche Formel wie im vorigen Beweis). Für $m = 1$ ist das jedenfalls eine triviale Aussage, und für den Induktionsschritt rechnet man

$$\begin{aligned} A^{m+1} \cdot v &= A \cdot A^m \cdot v \\ &= (1-m) \cdot A \cdot v \cdot \lambda^m + m \cdot A^2 \cdot v \cdot \lambda^{m-1} \\ &= (1-m) \cdot A \cdot v \cdot \lambda^m + m \cdot (2 \cdot A \cdot v \cdot \lambda - v \cdot \lambda^2) \cdot \lambda^{m-1} \\ &= (1-m) \cdot A \cdot v \cdot \lambda^m + 2m \cdot A \cdot v \cdot \lambda^m - m \cdot v \cdot \lambda^{m+1} \\ &= (1-(m+1)) \cdot v \cdot \lambda^{m+1} + (m+1) \cdot A \cdot v \cdot \lambda^{(m+1)-1} \end{aligned}$$

Für $m = k$ erhalten wir

$$v = \mathbb{I}_n \cdot v = A^k \cdot v = (1-k) \cdot v \cdot \lambda^k + k \cdot A \cdot v \cdot \lambda^{k-1} = (1-k) \cdot v + k \cdot A \cdot v \cdot \lambda^{k-1},$$

oder umgeschrieben

$$A \cdot v = v \cdot \frac{1-(1-k)}{k \cdot \lambda^{k-1}} = v \cdot \frac{1}{\lambda^{k-1}} = v \cdot \lambda,$$

was zu zeigen war.

□

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede normale Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C})$ und jede unitäre Matrix $P \in \mathrm{U}(n)$ ist auch $P^{-1} \cdot A \cdot P = P^\dagger \cdot A \cdot P$ normal.

Finden Sie ein Gegenbeispiel zu einer der beiden folgenden Aussagen:

2. Für jede normale Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C})$ und jede invertierbare Matrix $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist auch $P^\dagger \cdot A \cdot P$ normal.
3. Für jede normale Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C})$ und jede invertierbare Matrix $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist auch $P^{-1} \cdot A \cdot P$ normal.

Hinweis: Gegenbeispiele gibt es in beiden Fällen schon für $n = 2$.

Lösung. 1. Wir rechnen

$$(P^\dagger \cdot A \cdot P)^\dagger \cdot (P^\dagger \cdot A \cdot P) = P^\dagger \cdot A^\dagger \cdot (P^\dagger)^\dagger \cdot P^\dagger \cdot A \cdot P = P^\dagger \cdot A^\dagger \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P^\dagger \cdot A^\dagger \cdot A \cdot P$$

und

$$(P^\dagger \cdot A \cdot P) \cdot (P^\dagger \cdot A \cdot P)^\dagger = P^\dagger \cdot A \cdot P \cdot P^\dagger \cdot A^\dagger \cdot (P^\dagger)^\dagger = P^\dagger \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P \cdot A^\dagger \cdot P = P^\dagger \cdot A \cdot A^\dagger \cdot P.$$

Da A normal ist, gilt $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger$ und damit stimmen die rechten Ausdrücke wie gewünscht überein.

2. Man beobachtet zunächst, dass für A hermitesch auch $P^\dagger AP$ immer hermitesch ist (A und $P^\dagger AP$ stellen schließlich die gleiche Sesquilinearform in unterschiedlichen Basen dar). Das heißt ein Gegenbeispiel lässt sich nicht unter den hermiteschen Matrizen finden. Eine Matrix A ist aber normal genau dann, wenn es kommutierende hermitesche Matrizen B, C gibt, mit $A = B + iC$. Dann haben wir

$$P^\dagger AP = P^\dagger(B + iC)P = P^\dagger BP + iP^\dagger CP$$

als hermitesche Zerlegung von $P^\dagger AP$, sodass $P^\dagger AP$ genau dann normal ist, wenn

$$(P^\dagger BP) \cdot (P^\dagger CP) = (P^\dagger CP) \cdot (P^\dagger BP),$$

also genau dann, wenn $BSC = CSB$ für $S = PP^\dagger$. Aber S ist dann ebenfalls hermitesch und sogar positiv definit und umgekehrt lässt sich nach einem Satz aus der Vorlesung jede positiv definite hermitesche Matrix S als $PP^\dagger$ für eine invertierbare Matrix P schreiben.

Lange Rede kurzer Sinn: Wir brauchen also kommutierende hermitesche Matrizen B, C und eine positiv definite hermitesche Matrix S mit $BSC \neq CSB$. Hierfür können wir versuchen $B = \mathbb{I}_n$ wählen: Dann kommutieren sicherlich B und C, egal wie wir C wählen, und wir benötigen noch zwei hermitsche Matrizen C, S die nicht kommutieren, und von denen eine positiv definitit ist. Hier gibt es nun viele Möglichkeiten. Die vielleicht einfachste ist es S diagonal zu wählen, sodass Linksmultiplikation mit S die Zeilen und Rechtsmultiplikation mit S die Spalten von B verändert, und B hermitesch aber nicht symmetrisch. Konkret kann man etwa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

wählen, womit man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

normal, und

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

mit

$$P^\dagger AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

nicht normal, erhält.

3. Nach dem komplexen Spektralsatz ist eine Matrix normal genau dann, wenn sie diagonalisierbar mittels einer unitären Eigenbasis ist. Ist dann B eine Matrix, die diagonalisierbar, aber nicht unitär diagonalisierbar ist, so gibt es eine invertierbare Matrix Q derart, dass $A := Q^{-1}BQ$ diagonal (also insbesondere normal!) ist, aber für $P = Q^{-1}$ ist $P^{-1}AP = QAQ^{-1} = B$ nicht normal.

   Konkret können wir also die Eigenvektoren etwa als $(1,0)$ und $(1,1)$ wählen (deren Winkel im $\mathbb{R}^2$ ist schließlich $\pi/4 = 45°$) und als zugehörige Eigenwerte 0 und 1: Die beiden Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{C}^2$, wir können ihre Bilder also beliebig vorschreiben. Konkret ist in diesem Fall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   normal,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   und

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   nicht normal.

$\square$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und $P \in K[T]$ normiert und irreduzibel. Seien weiter $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ derart, dass $\min_A = P = \min_B$ gilt. Zeigen Sie:

1. A und B sind ähnlich zu einander.
2. Es gilt $\deg(P) \mid n$.

Lösung.

1. Aufgrund des Satzes über die Frobeniusnormalform sind zwei Matrizen ähnlich genau dann, wenn sie die gleichen invarianten Faktoren (inklusive Vielfachheit) haben. Aber die invarianten Faktoren sind Teiler des Minimalpolynoms und nicht konstant. In unserem Falle, sind die invarianten Faktoren von sowohl A und B also allesamt nicht konstante Teiler von P, und damit gleich P, da P irreduzibel ist, und damit A und B ähnlich.

2. Die (gemeinsame) Frobeniusnormalform von A und B muss nach der Vorüberlegung

$$\begin{pmatrix} C_P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_P, \end{pmatrix}$$

lauten, was bei k Blöcken eine Matrix der Größe $k \cdot \deg(P)$ ist, und damit muss $n = k \cdot \deg(P)$ gelten.

Alternativ folgt diese Aussage auch direkt daraus, dass $\chi_A \mid \min_A^n = P^n$ gilt und damit aufgrund der Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen $\chi_A = P^k$, ergo $n = \deg(\chi_A) = \deg(P^k) = k \cdot \deg(P)$.

□