Fabian Hebestreit

Universität Bielefeld
WS 24/25

Lineare Algebra II
Probeklausur

30.07.2024, 08:15 in H4

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 120 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 24 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen sie einen dokumentensicheren Stift, in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-5 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Falls Sie nicht im WS 24/25 erfolgreich am Übungsbetrieb der Linearen Algebra II teilgenommen haben, wird Ihre Klausur nicht bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Zu jedem Aufgabenteil gibt es mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten und es einen Punkt bei vollständig korrekter Auswahl.

(a) Für welche kommutativen Ringe R sind Polynome durch ihre assoziierten polynomiellen Funktionen $R \to R$ bestimmt:

- ☒ $R = \mathbb{Z}/3[T]$
- ☐ $R = \mathbb{Z}/5$
- ☐ $R = \mathbb{Z}/7[T]/\langle T^2\rangle$
- ☒ $R = \mathbb{Z}$.

Erklärung: *Dies gilt nach einem Satz der Vorlesung für Integritätsbereiche genau dann wenn sie unendlich sind. Das sind die beiden angekreuzten offenbar, und die anderen nicht (der dritte hat* $7^2 = 49$ *Elemente, da er* $[1],[T]$ *als* $\mathbb{Z}/7$*-Basis hat.*

(b) Für welche $0 \neq b \in \mathbb{Z}/5$ sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{Z}/5)$ kongruent zueinander?

- ☐ $b = 1$
- ☒ $b = 2$
- ☒ $b = 3$
- ☐ $b = 4$

Erklärung: *Nach einem Satz der Vorlesung sind zwei symmetrische, invertierbare Matrizen über einem endlichen Körper ungerader Charakteristik kongruent genau dann, wenn sie die gleiche Diskriminante haben, also wenn sich die Determinanten nur durch Multiplikation mit einem Quadrat (außer* 0*) unterscheiden. Die Determinante links lautet* $2 - b^2$*, die rechts* 2*, und die Quadrate in* $\mathbb{Z}/5$ *sind* 1 *und* 4*. Kongruenz gilt also, wenn* $2 - b^2 = 2, 3$ *und das sind genau die angekreuzten Fälle.*

(c) Welche der folgenden beiden komplexen Matrizen besitzen eine unitäre Basis aus Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ keine
- ☐ nur die linke
- ☒ nur die rechte
- ☐ beide

Erklärung: *Nach dem komplexen Spektralsatz gilt es zu prüfen, ob* $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger$ *gilt. Für die rechte gilt* $A^\dagger = A$ *(sie ist also hermitesch), sodass diese Aussage sicherlich stimmt, aber für die linke finden wir*

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2-2i \\ 2+2i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

(d) Was ist die Elementarteilerform von

$$\begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^2 - T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{Q}[T])?$$

- ☒ $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^3 - T^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^4 - T^3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^2 - T \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} T^2 - T & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix}$

Erklärung: *Die unteren zwei Matrizen sind nicht einmal in Elementarteilerform. In der Vorlesung haben wir besprochen, dass bei einer Diagonalmatrix der erste Elementarteiler immer der größte gemeinsame Teiler der Diagonaleinträge ist, und offenbar ist der von* T^2 *und* $T^2 - T$, *also bleibt nur die erste Form. Der eigentliche Algorithmus ist aber auch einfach:*

$$\begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^2-T \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} T^2 & T^2-T \\ 0 & T^2-T \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} T^2 & -T \\ 0 & T^2-T \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -T & T^2 \\ T^2-T & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -T & 0 \\ T^2-T & T^3-T^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -T & 0 \\ 0 & T^3-T^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordannormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{C})$$

und auch eine Jordanbasis.

Lösungsskizze. Bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$\det \begin{pmatrix} T-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & T & 0 & 0 \\ -3 & -4 & T-2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & T \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} T-2 & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix}^2 = ((T-2)T+1)^2 = (T^2-2T+1)^2 = (T-1)^4$$

Es ist also 1 der einzige Eigenwert von A. Wir können uns also die Bestimmung der Haupträume sparen und direkt die Folge der iterierten Bilder bestimmen. Diese lautet

$$\mathrm{im}(A-\mathbb{I}_4) = \langle (1,-1,3,-2), (1,-1,4,-3), (0,0,1,-1) \rangle$$

was offenbar $(1,-1,3,-2), (0,0,1,-1)$ als Basis hat. Und dann

$$\mathrm{im}((A-\mathbb{I}_4)^2) = \langle (A-\mathbb{I}_4)\cdot(1,-1,3,-2), (A-\mathbb{I}_4)\cdot(0,0,1,-1) \rangle = \{0\}$$

Wir sind also im einfachst möglichen Fall und lesen ab, dass

$$B^{-1}\cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R}).$$

Lösung. Zunächst einmal haben wir $\langle e_1, e_1 \rangle_S = 1$. Dann berechnen wir

$$e_2^{(2)} = e_2 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_2 \rangle_S}{\langle e_1, e_1 \rangle_S} = (0,1,0) - (1,0,0) \cdot 2 = (-2,1,0)$$

$$e_3^{(2)} = e_3 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_3 \rangle_S}{\langle e_1, e_1 \rangle_S} = (0,0,1)$$

Dann sehen wir $\langle e_3^{(2)}, e_3^{(2)} \rangle_S = 1$ und berechnen

$$e_2^{(3)} = e_2^{(2)} - e_3^{(2)} \cdot \frac{\langle e_3^{(2)}, e_2^{(2)} \rangle_S}{\langle e_3^{(2)}, e_3^{(2)} \rangle_S} = (-2,1,0) - (0,0,1) \cdot 2 = (-2,1,-2)$$

und dann

$$\langle e_2^{(3)}, e_2^{(3)} \rangle_S = (-2,1,-2)^t \cdot S \cdot (-2,1,-2) = (-2,1,-2)^t \cdot (0,-7,0) = -7.$$

Es folgt, dass S zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kongruent ist und damit Signatur 1 besitzt. □

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{Q})$ eine Matrix mit irreduziblem Minimalpolynom $\min_A \in \mathbb{Q}[T]$, so ist A über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Lösung. Da $\min_A$ irreduzibel ist, ist $\min_A$ inbesondere teilerfremd zu $\mathrm{d}(\min_A)$ in $\mathbb{Q}[T]$: Ein gemeinsamer Teiler müsste ja insbesondere ein Teiler von $\min_A$ sein, damit entweder konstant oder assoziiert zu $\min_A$, womit er aber zu großen Grad hätte um $\mathrm{d}(\min_A)$ noch teilen zu können. Damit sind wie wir in den Übungen gesehen hatten, aber $\min_A$ und $\mathrm{d}(\min_A)$ auch über $\mathbb{C}[T]$ teilerfremd (zur Erinnerung: Nach dem Lemma von Bézout gibt es rationale Polynome P, Q mit $1 = P \cdot \min_A + Q \cdot \mathrm{d}(\min_A)$ und diese Beziehung besteht ja dann in $\mathbb{C}[T]$ weiterhin, sodass ein gemeinsamer komplexer Teiler von $\min_A$ und $\mathrm{d}(\min_A)$ auch 1 teilen muss). Und es war ein Satz der Vorlesung, dass eine Matrix über $\mathbb{C}$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\min_A$ und $\mathrm{d}(\min_A)$ teilerfremd sind. □

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})$ symmetrisch. Zeigen Sie:

1. Ist A positiv definit, so gilt $\det(A) > 0$.
2. Folgern sie, dass auch für jedes $1 \le k \le n$ die $k \times k$-Untermatrix von A, die aus dem Schnitt der ersten k Zeilen und k Spalten besteht, positive Determinante hat.
3. Zeigen Sie umgekehrt, dass wenn jeder dieser Untermatrizen positive Determinante hat, dann ist A positiv definit.

Hinweis: Für den dritten Teil bietet sich zum Beispiel an eine Induktion über i für die Aussage an, dass $\langle -,- \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^i \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine positiv definite Bilinearform definiert.

Lösung.

1. Hier gibt es viele Möglichkeiten: Die einfachste ist vielleicht, dass A nach dem reellen Spektralsatz diagonalisierbar ist mit positiven Eigenwerten (weil A als positiv definitiv angenommen ist) und deren Produkt die Determinante ist.
2. Mit A sind auch diese Untermatrizen positiv definit: Sie stellen schließlich per Konstruktion die Einschränkung von $\langle -,- \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ dar, und diese ist sicherlich nicht weniger positiv definit. Die Behauptung folgt also aus 1.
3. Einzig dieser dritte Teil bedarf eines echten Arguments: Wir folgen dem Hinweis. Für $k = 1$ ist die Behauptung, dass
$$\mathbb{R} \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,0) \longmapsto x \cdot A_{1,1} \cdot x$$
außer bei $(0,0)$ nur positive Werte annimmt, wenn $A_{1,1} > 0$ gilt, offensichtlich richtig.

   Für den Induktionsschritt, nehmen wir also an, dass $\langle -,- \rangle_A$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ positiv definit ist. Wählen wir dann eine Orthogonalbasis $b_1, \dots, b_k$ von $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bezüglich dieser Form, und betrachten das orthogonale Komplement U hiervon in $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$. Dieses ist eindimensional und für jedes $0 \neq b_{k+1} \in U$ bilden die b_i dann eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle b_{k+1}, b_{k+1} \rangle_A > 0$ gilt. Die $(k+1) \times (k+1)$-Matrix A_{k+1} die aus dem Schnitt der ersten $k+1$ Spalten und Zeilen von A gebildet ist, ist als darstellende Matrix der Einschränkung von $\langle -,- \rangle_A$ bezüglich der Standardbasis aber kongruent zur darstellenden Matrix dieser Einschränkung bezüglich b. Per Konstruktion erhalten wir also
$$B^t A_{k+1} B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle b_{k+1}, b_{k+1} \rangle_A \end{pmatrix}.$$
wo C die Basiswechselmatrix zwischen der Standardbasis und b ist. Aber damit haben wir auch
$$\langle b_{k+1}, b_{k+1} \rangle_A = \det(B^t A_{k+1} B) = \det(B)^2 \cdot \det(A_{k+1}) > 0$$
per Annahme.

□