Fabian Hebestreit

Universität Bielefeld
WS 24/25

Lineare Algebra II
Probeklausur

30.07.2024, 08:15 in H4

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 120 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 24 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen sie einen dokumentensicheren Stift, in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-5 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Falls Sie nicht im WS 24/25 erfolgreich am Übungsbetrieb der Linearen Algebra II teilgenommen haben, wird Ihre Klausur nicht bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Zu jedem Aufgabenteil gibt es mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten und es einen Punkt bei vollständig korrekter Auswahl.

(a) Für welche kommutativen Ringe R sind Polynome durch ihre assoziierten polynomiellen Funktionen $R \to R$ bestimmt:

- ☐ $R = \mathbb{Z}/3[T]$
- ☐ $R = \mathbb{Z}/5$
- ☐ $R = \mathbb{Z}/7[T]/\langle T^2 \rangle$
- ☐ $R = \mathbb{Z}$.

(b) Für welche $0 \neq b \in \mathbb{Z}/5$ sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{Z}/5)$ kongruent zueinander?

- ☐ $b = 1$
- ☐ $b = 2$
- ☐ $b = 3$
- ☐ $b = 4$

(c) Welche der folgenden beiden komplexen Matrizen besitzen eine unitäre Basis aus Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ keine
- ☐ nur die linke
- ☐ nur die rechte
- ☐ beide

(d) Was ist die Elementarteilerform von

$$\begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^2 - T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{Q}[T])?$$

- ☐ $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^3 - T^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^4 - T^3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^2 - T \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} T^2 - T & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordannormalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$

und auch eine Jordanbasis.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{Q})$ eine Matrix mit irreduziblem Minimalpolynom $\min_A \in \mathbb{Q}[T]$, so ist A über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Zeigen Sie:

1. Ist A positiv definit, so gilt $\det(A) > 0$.
2. Folgern sie, dass auch für jedes $1 \leq k \leq n$ die $k \times k$-Untermatrix von A, die aus dem Schnitt der ersten k Zeilen und k Spalten besteht, positive Determinante hat.
3. Zeigen Sie umgekehrt, dass wenn jeder dieser Untermatrizen positive Determinante hat, dann ist A positiv definit.

Hinweis: Für den dritten Teil bietet sich zum Beispiel an eine Induktion über i für die Aussage an, dass $\langle -, - \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^i \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine positiv definite Bilinearform definiert.