Funktionentheorie: Übung 1

1. Seien a, $b \in \mathbb{C}$ mit $|\overline{a}b| \neq 1$ und entweder $|a| = 1$ oder $|b| = 1$. Zeigen Sie, dass dann
$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1.$$

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)$$
konvergent?

3. Angenommen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine analytische Funktion, wobei
$$|f(z)| = K_1,$$
für eine Konstante K_1 und für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f tatsächlich eine konstante Funktion ist ($f(z) = K_2$, für eine Konstante K_2 und für alle $z \in \mathbb{C}$).

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Gegeben zwei Punkte u, $v \in G$, dann ist ein *Pfad* in G von u nach v eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls $\gamma : [0,1] \to G$, wobei $\gamma(0) = u$ and $\gamma(1) = v$. Sei $z_0 \in G$ irgendein Punkt in G. Sei G_0 die Menge der Punkte w, für die ein Pfad in G existiert von z_0 nach w. Sei G_1 die Menge aller Punkte in G, die nicht in G_0 liegen. (D.h. $G_1 = G \setminus G_0$.) Zeigen Sie, dass sowohl G_0 als auch G_1 offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind.