

Funktionentheorie: Übung 10

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

überall analytisch in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist, wobei die Punkte $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ isolierte Polstellen sind.

2. Zeigen Sie nun, dass jede $p \in \mathbb{Z}$ eine hebbare Singularität der Funktion

$$g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

ist und daher g als eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genommen werden kann.

3. Zeigen Sie, dass für $z = x + iy$, gilt sowohl

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0$$

als auch

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0.$$

4. Und folglich $g(z) = 0$ für alle z . Warum?