

Funktionentheorie: Übung 11

1. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, mit

$$f(z) = e^{g(z)}$$

für alle z .

2. Mit Hilfe der partielle Integration zeigen Sie, dass für $\operatorname{Re}(z) > 0$, und $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

3. Für $0 \leq t \leq n$ ist offensichtlich

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Zeigen Sie dass

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^\infty \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

für $\operatorname{Re}(z) > 1$.