Funktionentheorie: Übung 2

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Angenommen, eine stetige, differienzierbare Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ existiert, mit $F'(z) = f(z)$, für alle $z \in G$. Sei $\gamma : [0,1] \to G$ eine differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

2. Sei G ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Angenommen, es gibt ein $z_0 \in G$, so dass $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle z mit

   $$0 < |z - z_0| \leq \epsilon$$

   gilt $z \in G$ und auch $f(z) \neq 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt

   $$\int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

3. Diesmal sei K irgendeine kompakte Teilmenge von G (G wieder ein Gebiet), und $\varphi : G \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar. Für jede differenzierbare Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to K$ sei L_γ die Länge von γ.

   (Daher $L_\gamma = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.)

   Zeigen Sie, dass ein $M > 0$ existiert, so dass $L_{\varphi\circ\gamma} \leq M \cdot L_\gamma$, für alle differenzierbaren Kurven γ in K.