Funktionentheorie: Übung 3

1. Die Exponentialfunktion ist

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

   Wie in der reellen Analysis werden auch die trigonometrischen Funktionen für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

   (a) Kann es sein, dass $\cos(x + iy) = 0$ oder $\sin(x + iy) = 0$ wenn $y \neq 0$?

   (b) Zeigen Sie, dass sowohl $|\cos(z)|$ als auch $|\sin(z)|$ beliebig gross sein kann.

   (c) Für welche z ist $\sin(z) \in \mathbb{R}$?

2. (a) Was ist

$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z-1} \, ?$$

   (b) Und was ist

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz$$

   für $n \in \mathbb{N}$?

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und sei $|f(z)| \leq |z|^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f ein Polynom sein muss.