

Funktionentheorie: Übung 4

1. (a) Seien $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare Kurven mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Die zusammengesetzte Kurve $\gamma = \alpha \cdot \beta$ (wobei ebenfalls $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$) ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{falls } t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz.$$

- (b) Sei die Kurve α^{-1} gegeben durch $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\alpha^{-1}} f(z) dz = - \int_{\alpha} f(z) dz.$$

2. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$ eine weitere Zahl $w \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$|f(w) - z| < \epsilon.$$

3. Die Exponentialfunktion ist

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Zu zeigen:

- (a) Die Exponentialfunktion besitzt keine Nullstellen.
(b) Für alle $z_0 \neq 0$ gibt es unendlich viele verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\exp(z) = z_0.$$