

Funktionentheorie: Übung 5

1. Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} z^3 \sin(1/z), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

differenzierbar in 0 ?

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ein differenzierbare Monomorphismus. Zeigen Sie, dass f höchstens eine einzige einfache Nullstelle besitzt.
3. Wieder ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ differenzierbar, wobei sowohl $H(0, t) = w_0$ als auch $H(1, t) = w_1$ konstant sind, für alle t .

Zwei Pfade γ_0 und γ_1 werden durch die Festlegung $\gamma_j(t) = H(t, j)$, ($j = 0, 1$) und $t \in [0, 1]$, definiert. Zu zeigen:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$