Funktionentheorie: Übung 6

1. Für $z = r + i\theta$ ist $\exp(z) = e^r e^{i\theta}$. Daher ist die Exponentialfunktion eine Surjektion $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei nun

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \text{ und } \alpha - \pi \leq y < \alpha + \pi\}$$

der (halb offene) 'Streifen' um α. Dann ist $\exp : S_\alpha \leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Bijektion. Die zu exp inverse Abbildung ist der Logarithmus, 'log'. Indem verschiedene Zahlen α genommen werden, kann der Logarithmus immer, zumindest lokal, festgelegt werden.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion log analytisch ist. Was ist $\log'(z)$?

   (b) Die Funktion log kann durch analytische Fortsetzung entlang des Weges $|z| = 1$ (d.h. entlang der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, wobei $\gamma(t) = e^{it}$) festgelegt werden. Aber es gilt dann, dass $\log(\gamma(0)) \neq \log(\gamma(2\pi))$, obwohl doch $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$! Warum?

2. Die Gammafunktion wird durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$$

definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass das Integral konvergiert, für $\mathrm{Re} z > 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktionalgleichung $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ gilt für alle solche z.