Funktionentheorie: Übung 7

1. Sei $Q = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$ das Innere des Einheitsquadrats, und sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad in $\mathbb{C}$.

   - Zeigen Sie, dass ein Punkt $a \in Q$ existiert, der nicht auf γ liegt. D.h. $a \neq \gamma(t)$ for all $t \in [0, 1]$.
   - Angenommen sowohl $\gamma(0)$ als auch $\gamma(1)$ liegen nicht in Q. Zeigen Sie, dass eine Homotopie existiert, die konstant ist für alle Punkte auf γ, die nicht in Q liegen, und dass γ durch die Homotopie zu einem Pfad außerhalb von Q transformiert wird.

2. Sei $w \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Zahlen $z \in \mathbb{C}$ existieren mit

   $$e^{1/z} = w$$

   und $|z| < \epsilon$.

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. D.h. f ist stetig differenzierbar überall in $\mathbb{C}$. Für $z \neq 0$ wird die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch die Regel

   $$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

   definiert. Was sind die Bedingungen dafür, dass 0 eine Polstelle oder eine hebbare Singularität der Funktion g ist?