Funktionentheorie: Übung 8

1. Angenommen, R sei eine rationale Funktion[1] und $0 < \lambda < 1$ eine reelle Zahl. Angenommen, R besitzt eine Nullstelle der Ordnung mindests zwei in ∞, und eine einfache Polstelle in 0. Sei dann

$$h(z) = z^\lambda R(z).$$

   Zeigen Sie, dass

   (a)
$$\lim_{r \to 0} \int_{|z|=r} h(z) dz = 0,$$

   (b)
$$\lim_{s \to \infty} \int_{|z|=s} h(z) dz = 0.$$

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Was ist

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \quad ?$$

3. Für $|z| = 1$ gilt $z = \cos\theta + i \sin\theta$, für ein θ zwischen 0 und 2π. Können Sie zeigen, dass

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

   where $a > 1$?

[1] D.h. es existieren zwei ganze Funktionen f, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei g nicht einfach die konstante Nullfunktion ist, und $R = f/g$.