

Funktionentheorie: Übung 9

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Residuenkalkül.

(a)

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13} dx$$

(b)

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0$$

(c)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx$$

2. Seien $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganze Funktionen, wobei $R(z) = g(z)/h(z)$ dann eine rationale Funktion ist. Angenommen, R besitzt eine Nullstelle der Ordnung eins in ∞ und keine Polstellen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} R(x) dx$$

existiert, aber der Limes ist nicht

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a) > 0} \operatorname{Res}_a R(z).$$