Elementare Zahlentheorie (Version 1): Übung 3

Sei $M \subset \mathbb{Z}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Wir werden sagen, daß M ein *Modulus* ist, falls wann immer a und b zwei Zahlen in M sind, dann sind auch die Summe $a+b$ und die Differenz $a-b$ in M.

Natürlich ist die leere Menge $\emptyset$, und auch die Null alleine $\{0\}$, ein Modulus. Aber diese sind für uns trivial und uninteressant.

Sei nun $M \subset \mathbb{Z}$ ein *nicht*-trivialer Modulus. Zeigen Sie daß...

1. M auch positive Integerzahlen enthält. D.h. $M \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.
2. M sogar *unendlich viele* positive Integerzahlen enthält.
3. Sei $d \in \mathbb{N}$ die kleinste positive Integerzahl in M. Dann sind alle Zahlen der Art kd auch in M, für alle $k \in \mathbb{Z}$. Tatsächlich ist $M = \{kd : k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann ist $M = \{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein Modulus.
5. Sei $d \in \mathbb{N}$ so, daß $\{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{kd : k \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist d der größte gemeinsame Teiler von a und b (wobei a und $b \in \mathbb{N}$ vorgegeben sind).