Elementare Zahlentheorie (Version 1): Übung 7

1. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven Zahlen ($c_n > 0$, für alle n). Angenommen, eine feste Zahl δ zwischen 0 und 1 ($0 < \delta < 1$) existiert, wobei
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \delta, \text{ für alle } n.$$
Zeigen Sie, daß dann
$$c_n \leq c_1 \delta^n,$$
für alle n.

2. Sei die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Übung 1. Zeigen Sie, daß die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
konvergiert.

3. Die Zahl $0,999999999999\ldots$ ist eigentlich die Zahl 1. Daher gibt es zwei *verschiedene* Dezimalzahlen, die dieselbe reelle Zahl darstellen.

   Aber diese Zweideutigkeit ist eigentlich die Ausnahme. Falls zwei verschiedene Dezimalzahlen vorgegeben sind, wobei beide *keine* unendliche Folge von Neunen haben, dann beschreiben sie echt verschiedene reellen Zahlen. Können Sie diese Tatsache begründen?