

Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 1

1. Sei $a^n - 1$ eine Primzahl. Z.B. $2^5 - 1 = 31$. Dann heißt $a^n - 1$ eine Mersenne Primzahl. Zeigen Sie, daß dann $a = 2$ und n selbst eine Primzahl sein muß.
2. Der ‘Goldener Schnitt’ ist die Zahl $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Es ist zu zeigen:

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

3. Offensichtlich ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ konvergent. Sei

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Zeigen Sie, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ beliebig große Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^m}.$$