

Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 10

1. Angenommen, $c \in \mathbb{N}$ und $a, b, m \in \mathbb{Z}$, wobei m *keine* quadratische Faktoren enthält. (D.h. in der Primfaktorzerlegung von m gibt es keine Primzahlenpotenzen höher als 1.) Sei weiterhin $c|2a$ und $c^2|a^2 - mb^2$. Zu zeigen: $c = 1$ oder 2 .
2. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod{3}$. Zeigen Sie, daß dann

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1.$$

3. Sei nun die Integerzahl $m \geq 2$. Zeigen Sie, daß für alle $\epsilon > 0$ eine algebraische Integerzahl $\alpha \neq 1$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ existiert, mit $|1 - \alpha| < \epsilon$.