Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 2

1. Sei
$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \approx 2,718281828\ldots$$
Welche rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $|n| \leq 100$ gibt die beste Approximation zu e? D.h. für welche m und n ist $\left|e - \frac{m}{n}\right|$ so klein wie möglich, wobei $|n| \leq 100$?

2. Sei F ein Körper und sei $F[x]$ die Menge aller Polynome über F.

   (a) Ein Polynom $P(x) \in F[x]$ heißt *irreduzibel*, falls es nicht möglich ist, $P(x) = Q(x) \times R(x)$ zu schreiben, wobei $Q(x)$, $R(x) \in F[x]$ und $\mathrm{Grad}(Q) \geq 1$, $\mathrm{Grad}(R) \geq 1$. Zeigen Sie, daß jedes Polynom eine eindeutige Zerlegung in irreduzibelen Faktoren besitzt. D.h. gegeben $P(x) \in F[x]$ mit $\mathrm{Grad}(P) \geq 1$, dann gibt es irreduzible Polynome
   $$Q_1(x), \ldots, Q_m(x) \in F[x]$$
   mit
   $$P(x) = Q_1(x) \times \cdots \times Q_m(x).$$
   Falls $P(x) = R_1(x) \times \cdots \times R_n(x)$ noch eine weitere Zerlegung ist, dann ist $n = m$ und (nach einer möglichen Umordnung) $Q_i(x) = k_i \cdot R_i(x)$, für alle i, wobei $k_i \in F$.

   (b) Seien $P(x)$, $Q(x) \in F[x]$ mit $\mathrm{Grad}(Q) \geq 1$. Zeigen Sie, daß zwei weitere Polynome R, $T \in F[x]$ existieren, mit $\mathrm{Grad}(R) < \mathrm{Grad}(Q)$ und
   $$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

3. Sei
$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{j(n,p)}.$$
Zeigen Sie, daß
$$j(n,p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\lceil \frac{n}{p^m} \right\rceil,$$
wobei $\lceil x \rceil$ die größte Integerzahl kleiner oder gleich x ist, für $x \in R$.

4. Zeigen Sie, daß
$$j(n,p) \leq \frac{n}{p-1}$$
und folglich
$$\sqrt[n]{n!} \leq \prod_{p|n} p^{1/(p-1)}.$$