

Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 3

1. Hier sind drei verschiedene arithmetische Funktionen¹:

- $\epsilon(n) = 1$,
- $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, und
- $I_k(n) = n^k$,

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, daß $\sigma_k = \epsilon * I_k$.

2. Sei $s > 1$. Dann wissen wir (siehe Analysis 1!), daß die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

konvergiert. Sei $a \in \mathcal{A}$ eine arithmetische Funktion. Die entsprechende *Dirichlet-Reihe* ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}.$$

(a) Für $a, b \in \mathcal{A}$, zeigen Sie, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} b(m)m^{-s} = \sum_{n,m} a(n)b(m)(nm)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} a * b(k)k^{-s}.$$

(b) Zeigen Sie, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)},$$

wobei μ die Möbius-Funktion ist.

(c) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_k(n)n^{-s} = \zeta(s-k).$$

Warum? Daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s} = \zeta(s)^2,$$

wobei $d(n) = \sigma_0(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist.

¹Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *arithmetische Funktion*. Siehe Vorlesungsskript.