Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 4

1. Zu zeigen:

   (a) $\eta = \mu * \epsilon$.

   (b) Falls a, $b \in \mathcal{A}$ beide multiplikativ, dann ist auch $a * b$ multiplikativ.

2. Zeigen Sie, da $\phi(p^l) = p^{l-1}(p-1)$ für Primzahlen $p \geq 3$.

   (Hier ist $\phi(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq k < n$ mit $ggt(n, k) = 1$.)

3. Sei $p = 13$. Die Zahl p ist somit eine Primzahl. Folglich ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (d.h. $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$) ein Körper. Nun, bekanntlich ist ein Körper ohne das Nullelement eine Gruppe unter Multiplikation. Eine Zahl $r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ heißt Primitivwurzel mod$p$, falls r die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ erzeugt. D.h. es gilt

   $$\{r^n \bmod p : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}.$$

   Welche Zahlen zwischen 1 und 12 sind Primitivwurzeln $\bmod 13$?

   Welche $t \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ haben Quadratwurzeln? Z.B. ist sicherlich 4 eine Quadratzahl in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, da $2 \times 2 = 4 \bmod 13$. Aber auch 12 ist eine Quadratzahl, da $5 \times 5 = 12 \bmod 13$. Was sind die anderen Quadratzahlen? Wieviele gibt es davon?