Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 8

Sei p eine Primzahl. Wir haben in der Vorlesung die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung $x^2 \pm my^2 = p$ untersucht für die Fälle $m = 0, 1, 2$. Wie ist es mit $m = 3$? Können Sie zeigen, daß für $p \geq 5$,

$$\exists x, y \in N \quad \text{mit} \quad x^2 + 3y^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad p = 1 \pmod 6\,?$$

1. Zeigen Sie, daß $p = 1 \pmod 6 \Leftrightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1$.
2. '$\Rightarrow$' ist dann unser Standardargument aus der Vorlesung.
3. '$\Leftarrow$' Sei $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$. Dann existiert ein $k \in Z$ mit

$$x^2 + 3y^2 = kp.$$

Zeigen Sie

(a) $k \neq 0$.

(b) $k = 3$ ist, genauso wie in den Fällen $|m| \leq 2$, kein Problem

(c) Falls $k = 2$, dann ist $x^2 = 2 \pmod 3$. Aber dies gibt einen Widerspruch, da $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$.