Elementare Zahlentheorie (Version 2): Übung 9

1. Sei $n = x^4 - x^2 + 1$ für ein $x \in \mathbb{Z}$ und sei p eine Primzahl mit $p|n$. Zeigen Sie, daß $p \equiv 1 \bmod 12$.

   Methode: Da $x^4 - x^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$ folgt
   $$(2x^2 - 1)^2 = -3 \bmod p$$
   und
   $$(x^2 - 1)^2 \equiv -x^2 \bmod p.$$
   Folglich ist $p \equiv 1 \bmod 3$ und $p \equiv 1 \bmod 4$.

2. Können Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ finden, die zwei <u>wesentlich</u> verschiedene Darstellungen als Summe von zwei Quadratzahlen zuläßt?

3. Für $j = 1, \ldots, m$ sei $\vec{v}_j = (e_{j1}, \ldots, e_{j,n})$ ein Vektor mit jeweils $e_{ji} \in \mathbb{N}_0$, wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Angenommen, $m > n$. Zeigen Sie, daß dann $k_1, \ldots, k_m \in N_0$ existieren (nicht alle Null) mit
   $$\sum_{j=1}^{m} k_j v_j \equiv \vec{0} = (0, \ldots, 0) \bmod 2.$$