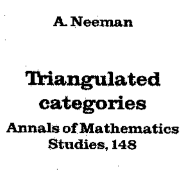


A. Neeman

Triangulated categories

Annals of Mathematics Studies, 148

Princeton Univ. Press, Princeton, 2001, 449 S., $ 46,–

Warum ein Buch über triangulierte Kategorien? Sie gehören heute zu den wichtigen Hilfsmitteln in Algebra, Geometrie und Topologie, so daß man vielleicht den Untertitel „Triangulated categories for the working mathematician“ erwartet. Tatsächlich hat Neeman allerdings mehr zu bieten. Neben einer elementaren Einführung in die Theorie der triangulierten Kategorien werden zwei Konzepte ausführlich behandelt, nämlich *Brownsche Darstellbarkeit* und *Bousfield Lokalisierung*. Beide Konzepte haben ihren Ursprung in der algebraischen Topologie der 60er und 70er Jahre, wurden jedoch in den 90er Jahren in einer Allgemeinheit weiterentwickelt, die unter anderem zu schönen Anwendungen in der algebraischen Geometrie und in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen führte.

Um die Thematik des vorliegenden Bandes zu verstehen, vergleichen wir triangulierte mit abelschen Kategorien. Eine abelsche Kategorie kann man sich als additive Kategorie (d. h. die Morphismenmengen bilden abelsche Gruppen und die Komposition ist bilinear) vorstellen, in der gewisse Sequenzen von Morphismen (die sogenannten *kurzen exakten Sequenzen*) ausgezeichnet sind und gewisse Axiome erfüllen. Eine triangulierte Kategorie ist ebenso eine additive Kategorie, in der gewisse Sequenzen von Morphismen (die sogenannten *exakten Dreiecke*) ausgezeichnet sind und gewissen Axiome erfüllen.

Das klassische Beispiel einer triangulierten Kategorie ist die *derivierte Kategorie* $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. In diesem Fall erhält man eine Einbettung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}), \quad X \longmapsto \bar{X},$$

und jede kurze exakte Sequenz $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathcal{A}$ induziert ein exaktes Dreieck $\bar{X} \to \bar{Y} \to \bar{Z} \to \bar{X}[1]$ in $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. Insbesondere liefert ein Element in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z, X)$ einen Morphismus $\bar{Z} \to \bar{X}[1]$ in $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, und allgemeiner gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Z, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\bar{Z}, \bar{X}[n])$$

für jedes $n \geq 0$.

Die derivierte Kategorie ermöglicht es also derivierte Funktoren zu berechnen. Verdier hat diese Idee in seiner Thèse erstmals formalisiert und in diesem Zusammenhang triangulierte Kategorien eingeführt [5]. Parallel dazu hat seinerzeit Puppe in der algebraischen Topologie dieselben Eigenschaften für die stabile Homotopiekategorie herausgearbeitet [4].

Betrachtet man abelsche Kategorien, so spielen häufig zusätzliche Eigenschaften eine wichtige Rolle. Klassisch sind sogenannte *Grothendieck Kategorien*, also abelsche Kategorien mit exakten induktiven Limites und einem Generator. Beispielsweise ist jede Modulkategorie eine Grothendieck Kategorie. In der Welt der triangulierten Kategorien sucht man zu Recht nach einem vergleichbaren Konzept. Bewährt haben sich die *kompakt erzeugten* triangulierten Kategorien, denn Brownsche Darstellbarkeit und Bousfield Lokalisierung lassen sich auf diese Klasse von triangulierten Kategorien übertragen. Die derivierte Kategorie einer Modulkategorie oder die stabile Homotopiekategorie der algebraischen Topologie sind klassische Beispiele für kompakt erzeugte triangulierte Kategorien. Allerdings treten in der Praxis triangulierter Kategorien auf, die nicht kompakt erzeugt sind. Hier setzt Neeman mit seiner Verallgemeinerung an und entwickelt das Konzept der *wohlerzeugten* (englisch: *well generated*) triangulierten Kategorie.

Die Diskussion der wohlerzeugten Kategorien bildet das Herzstück dieser Monographie. Die Definition ist zugegebenermaßen kompliziert, läßt sich jedoch glücklicherweise erheblich vereinfachen [1]. Die entscheidende Idee geht zurück auf Freyd und wird in diesem Buch ausführlich behandelt. Es handelt sich quasi um eine Umkehrung der Konstruktion von Verdier, d. h. eine triangulierte Kategorie wird universell in eine abelsche Kategorie eingebettet, so daß exakte Dreiecke in exakte Sequenzen überführt werden. Diese universelle abelsche Kategorie ist im allgemeinen zu groß, aber lässt sich im Fall der wohlerzeugten Kategorien geschickt verkleinern ohne daß zu viel Information verloren geht.

Wohlerzeugte Kategorien verallgemeinern also die kompakt erzeugten Kategorien, und das erklärte Ziel dieser Verallgemeinerung sind die Übertragung von Brownscher Darstellbarkeit und Bousfield Lokalisierung auf wohlerzeugte triangulierte Kategorien. Der *Brownsche Darstellbarkeitssatz* besagt für eine triangulierte Kategorie $\mathcal{T}$ mit beliebigen Koprodukten, daß jeder kontravariante Funktor $F: \mathcal{T} \to Ab$ in die Kategorie der abelschen Gruppen genau dann *darstellbar* ist (d. h. von der Form $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X)$ für ein Objekt X) wenn F exakte Dreiecke in exakte Sequenzen und Koprodukte in Produkte überführt. Dieser Satz ist äußerst nützlich. Beispielsweise erhält man einen eleganten Beweis für die Grothendieck Dualität indem man beobachtet, daß der Brownsche Darstellbarkeitssatz im Fall der derivierten Kategorie eines Schemas anwendbar ist [2].

Von einer *Bousfield Lokalisierung* spricht man sofern eine triangulierte Unterkategorie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ vorliegt, und der Quotientenfunktor $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ im Sinne Verdiers einen Rechtsadjungierten besitzt. Im Fall der Bousfield Lokalisierung ist die triangulierte Unterkategorie $\mathcal{S}$ *lokalisierend*, d. h. abgeschlossen unter Koprodukten. Diese Bedingung an $\mathcal{S}$ ist im allgemeinen jedoch nicht hinreichend. Beispielsweise wird gezeigt, daß die Bousfield Lokalisierung existiert falls $\mathcal{S}$ von einer Menge von Objekten erzeugt wird. In diesem Fall sind übrigens auch $\mathcal{S}$ und der Quotient $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ wohlerzeugt.

Insgesamt beruht ein Großteil des Materials in diesem Buch auf dem Wechselspiel zwischen triangulierter und abelscher Struktur. Dieses wird ergänzt durch eine Reihe von Anhängen, in denen vorwiegend das notwendige Material über abelsche Kategorien bereitgestellt wird. Damit ist die Darstellung im wesentlichen in sich abgeschlossen. Lediglich ein paar Grundkenntnisse über Kategorien und Funktoren, oder aus der homologischen Algebra werden vorausgesetzt. Dagegen verzichtet der Autor weitgehend auf Beispiele. Ein gewisses Interesse des Lesers an allgemeiner Theorie wird also vorausgesetzt. Hilfreich sind die historischen Bemerkungen am Schluß eines jeden Abschnitts. Sie vermitteln den Standpunkt des Autors und bieten eine gute Orientierung.

Kehren wir zur Ausgangsfrage nach dem Zweck eines solchen Buches über triangulierte Kategorien zurück, so ist die Antwort des Rezensenten zwiespältig. Sucht man eine elementare Einführung in die Theorie der triangulierten Kategorien, so ist man im Vergleich mit Verdiers Thèse mindestens ebenso gut bedient, Französischkenntnisse vorausgesetzt. Positiv erwähnt sei jedoch Neemans elegante Darstellung des sogenannten Oktaederaxioms. Moderne Aspekte, beispielsweise t-Strukturen, werden leider nicht berücksichtigt, wobei allerdings das Versprechen „We will see them [the six gluing functors] again in the discussion of t-structures.“ auf Seite 319 vom guten Willen des Autors zeugt.

Das Buch wird zu einer wertvollen Lektüre sobald man sich für *große* triangulierte Kategorien interessiert, also Kategorien mit beliebigen Koprodukten. Hier leistet Neeman echte Pionierarbeit, und diese verdient uneingeschränkte Anerkennung.

Literatur

[1] H. Krause: On Neeman's well generated triangulated categories. Documenta Math. **6** (2001), 119–125.

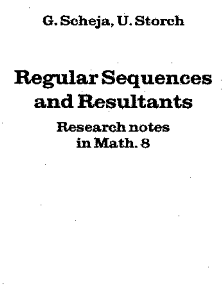
[2] A. Neeman: The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 205–236.

[3] A. Neeman: A survey of well generated triangulated categories. Preprint (2002).

[4] D. Puppe: On the structure of stable homotopy theory. Colloquium on algebraic topology, Aarhus Universitet Matematisk Institut (1962), 65–71.

[5] J. L. Verdier: Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Astérisque **239** (1996).

Paderborn H. Krause



G. Scheja, U. Storch
Regular Sequences and Resultants
Research notes in Math. 8

Natick, Mass., AK Peters, 2001, 142 S., $ 30,–

In dem Buch von Scheja und Storch wird die Eliminationstheorie in gewichteten projektiven Räumen behandelt, die über beliebigen kommutativen, noetherschen Ringen definiert sind. Dabei spielen reguläre Sequenzen und vollständige Durchschnitte eine wichtige Rolle. Demgemäß werden im zweiten der insgesamt vier Kapitel des Buches reguläre Sequenzen und vollständige Durchschnitte ausführlich behandelt, und zwar für beliebige noethersche Ringe in der lokalen als auch der globalen Version. Besonderes Augenmerk wird den graduierten vollständigen Durchschnitten gewidmet. Diese sind Restklassenringe von homogenen regulären Folgen in einem Polynomring über einem noetherschen Ring, dessen Variablen positive Gewichte besitzen.

Für die Definition von Resultanten sind generische reguläre Sequenzen von Bedeutung. Hierbei ist der Grundring des gewichteten Polynomrings selbst ein Polynomring über den ganzen Zahlen, und die Polynome der Sequenz besitzen als Koeffizienten die Unbestimmten des Grundrings. Das schwierige Problem, wann Sequenzen von homogenen generischen Polynomen eine reguläre Folge bilden, wird in dem Buch umfassend diskutiert. Dies führt zu dem Begriff der streng zulässigen Folgen. Insbesondere werden generische Binome charakterisiert, die streng zulässig sind.

Im weiteren Verlauf wird der Hauptsatz der Eliminationstheorie für projektive Räume vorgestellt und es wird gezeigt, dass das generische Eliminationsideal bezüglich streng zulässiger Folgen ein Haupt- und Primideal ist. Danach wird das Eliminationsideal bezüglich beliebiger homogener regulärer Folgen bestimmt. Insbesondere wird ausgeführt, dass das Eliminationsideal ein divisorielles Ideal ist, falls der Grundring ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist.

Das letzte Kapitel des Buches schließlich behandelt Resultanten. Diese sind insofern von Bedeutung, als sie dieselbe Nullstellenmenge wie das Eliminationsideal haben, darüberhinaus aber bessere funktorielle Eigenschaften besitzen. Die Autoren führen zunächst das Resultantenideal einer regulären Folge homogener Polynome eines Polynomrings über einem ganz abgeschlossenen noetherschen Integritätsbereich ein. Dabei stimmt die Länge der Folge mit der Anzahl der Variablen des Polynomrings überein. Es wird gezeigt, dass dieses Resultantenideal wieder divisoriell ist. Mit Hilfe des Koszulkomplexes, welcher der regulären Folge zugeordnet ist, wird ein kanonischer Erzeuger des Resultantenideals konstruiert. Dies führt zu expliziten Resultantenformeln, und verallgemeinert die von Hurwitz bekannte klassische Resultante, wo alle Variablen das Gewicht 1 haben.