ALGEBRA II
5. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (2+2 Punkte)

(a) Sei R ein Ring und M ein R-Modul mit Untermoduln M_1 und M_2. Zeigen Sie, dass der Kern der Abbildung

$$\sigma\colon M_1 \oplus M_2 \to M$$
$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$$

zum Untermodul $M_1 \cap M_2$ isomorph ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_1 + M_2 := \{m_1 + m_2 \in M \mid m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2\}.$$

ein R-Untermodul von M ist. Folgern Sie schließlich, dass $M_1 \oplus M_2 \cong M_1 + M_2$ genau dann gilt, wenn $M_1 \cap M_2 = 0$ gilt.

(b) Sei R ein Ring und $e \in R$ ein Idempotent. Zeigen Sie, dass Re und $R(1-e)$ Untermoduln von R (aufgefasst als R-Linksmodul) sind und dass es einen Isomorphismus von R-Linksmoduln

$$R \cong Re \oplus R(1-e)$$

gibt.

Aufgabe 2. (1+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper und $R = K[X]$.

(a) Überlegen Sie sich zunächst, dass jeder R-Modul M auf natürliche Weise ein K-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass man jeden R-Modul M als ein Paar $M = (V, f)$ auffassen kann, wobei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung ist. Zeigen Sie, dass man umgekehrt jedem solchen Paar (V, f) auf natürliche Weise einen R-Modul M_f zuordnen kann. Überlegen Sie sich, dass diese Zuordnungen (in einem geeigneten Sinne) invers zueinander sind.

(c) Sei $M = (V, f)$ ein R-Modul, dessen zu Grunde liegender Vektorraum endlich dimensional ist. Zeigen Sie, dass es genau dann Untermoduln $M_1 \neq 0 \neq M_2$ und einen R-Modulisomorphismus

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

gibt, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ des K-Vektorraums M gibt, sodass f in dieser Basis durch eine $(n+m) \times (n+m)$-Matrix der Form

$$A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit $A_1 \in \mathsf{M}_n(K)$ und $A_2 \in \mathsf{M}_m(K)$ dargestellt wird.

Abgabe: Donnerstag, 17. Mai 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie alle Untermoduln des $K[X]$-Moduls $M = K[X]/(X^n)$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Sei R ein Ring. Seien M, N R-Moduln und F ein freier R-Modul, so dass $F \cong M \oplus N$. Dann sind M und N freie R-Moduln.

(b) Sei n eine natürliche Zahl und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines freien $\mathbb{Z}$–Moduls M. Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$–Matrix über $\mathbb{Z}$. Setze $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ für $1 \leq i \leq n$.
Zeigen Sie, dass $w_1, \ldots, w_n$ genau dann eine Basis von M ist, wenn $|\det(A)| = 1$ gilt.