# ALGEBRA II
# 6. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

**Aufgabe 1.** (2+2 Punkte) Sei $R$ ein Ring und $L, M$ und $N$ seien $R$-Moduln.

$(a)$ Zeigen Sie, dass jeder Morphismus von $R$-Moduln $f\colon M \to N$ einen Morphismus von abelschen Gruppen

$$\operatorname{Hom}_R(L, f)\colon \operatorname{Hom}_R(L, M) \to \operatorname{Hom}_R(L, N)$$

induziert, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$(i)$ $\operatorname{Hom}_R(L, \mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_R(L,M)}$;

$(ii)$ Falls $g\colon N \to P$ ein weiterer Morphismus von $R$-Moduln ist, so gilt

$$\operatorname{Hom}_R(L, g \circ f) = \operatorname{Hom}_R(L, g) \circ \operatorname{Hom}_R(L, f).$$

$(b)$ Sei nun $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ eine exakte Sequenz von $R$-Moduln. Zeigen Sie, dass dann

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(L, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,f)} \operatorname{Hom}_R(L, N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,g)} \operatorname{Hom}_R(L, P)$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen ist.

**Aufgabe 2.** (2+2 Punkte)

$(a)$ Sei $f\colon M \to N$ ein surjektiver Morphismus von $R$-Moduln und $L$ ein beliebiger $R$-Modul. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann

$$\operatorname{Hom}_R(L, f)\colon \operatorname{Hom}_R(L, M) \to \operatorname{Hom}_R(L, N)$$

ein surjektiver Morphismus abelscher Gruppen ist.

$(b)$ Finden Sie ein Beispiel für eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

die *nicht spaltet* und einen $R$-Modul $L$, so dass

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(L, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,f)} \operatorname{Hom}_R(L, N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,g)} \operatorname{Hom}_R(L, P) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen ist.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ genau dann spaltet, wenn

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(L, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,f)} \operatorname{Hom}_R(L, N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(L,g)} \operatorname{Hom}_R(L, P) \to 0$$

für jeden $R$-Modul $L$ eine exakte Sequenz abelscher Gruppen ist.

---

Abgabe: Donnerstag, 24. Mai 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel einer kurzen exakten Sequenz von $R$-Moduln $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ die nicht spaltet, für die jedoch ein Isomorphismus $N \cong M \oplus P$ von $R$-Moduln existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ und den $\mathbb{Z}$-Modul $X = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Konstruieren Sie nun eine neue exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus X \to 0$ und zeigen Sie, dass diese die gewünschten Eigenschaften erfüllt.