ALGEBRA II
9. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei k ein Körper und

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in k \right\}.$$

Bestimmen Sie alle einfachen Untermoduln und alle maximalen Untermoduln von R aufgefasst als Linksmodul über R.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei R ein Ring und seien I_1 und I_2 maximale Linksideale in R. Zeigen Sie, dass die R-Moduln R/I_1 und R/I_2 genau dann zu einander isomorph sind, wenn es ein Element $a \in R$ mit $a \notin I_2$ und $I_1 a \subseteq I_2$ gibt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei R ein Ring und M ein R-Modul mit einem halbeinfachen Untermodul N und einem halbeinfachen Faktormodul M/N. Beweisen Sie oder widerlegen Sie, dass dann auch M halbeinfach ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu einer direkten Summe von *einreihigen*[1] $\mathbb{Z}$-Moduln isomorph ist. (Die einreihigen Summanden heißen auch Prüfergruppen.)

Folgern Sie, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ keine maximalen Untermoduln besitzen.

Abgabe: Donnerstag, 14. Juni 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.

[1]Ein Modul heißt *einreihig*, falls die Menge der Untermoduln bezüglich der Inklusion "$\subseteq$" total geordnet ist.