ALGEBRA II
10. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei k ein Körper und V ein unendlich dimensionaler k-Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$R := k \cdot \mathrm{Id}_V + \{\varphi \in \mathrm{End}_k(V) \mid \dim_k \varphi(V) < \infty\}$$

ein Unterring von $\mathrm{End}_k(V)$ ist. Zeigen Sie ferner, dass V ein einfacher R-Linksmodul ist und der Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ ein einfacher R-Rechtsmodul[1] ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei S ein Ring und $R = \mathrm{M}_n(S)$ der Ring der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in S. Für jeden S-Modul M wird M^n durch

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)$$

für $A = (a_{ij}) \in R$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ zu einem R-Modul. Zeigen Sie, dass man auch jedem R-Modul auf natürliche Weise einen S-Modul zuordnen kann und dass diese beiden Zuordnungen in einem geeigneten Sinne invers zueinander sind. Überlegen Sie sich ferner, dass es entsprechende Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_S(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M^n, N^n)$$

zwischen den Morphismenräumen gibt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei D ein Schiefkörper, $n \geq 1$ eine ganze Zahl und R ein Unterring von $M_n(D)$. Zeigen Sie, dass R genau dann ein halbeinfacher Ring ist, wenn D^n ein halbeinfacher R-Modul ist (für die offensichtliche R-Modulstruktur durch ein Einschränkung der von $M_n(D)$).

Geben Sie ein Beispiel für einen Unterring $R \subseteq M_n(D)$ an, der nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und I eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Wir betrachten den Ring

$$R := K^I := \{\text{Abbildungen } f\colon I \to K\}.$$

Zeigen Sie, dass Rx für alle $x \in R$ ein direkter Summand des R-Moduls R ist. Zeigen Sie ferner, dass R nicht halbeinfach ist.

Abgabe: Donnerstag, 21. Juni 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.

[1]Die Rechtsmodulstruktur auf V^* ist durch $(f\varphi)(v) := f(\varphi v)$ gegeben, wobei $f \in V^*$, $v \in V$ und $\varphi \in R$ seien.