ALGEBRA II
12. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (2+2 Punkte)

Sei R ein Ring.

(a) Sei M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein R-Untermodul. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rad} M \subseteq N$ gilt, falls M/N halbeinfach ist. Überlegen Sie sich ferner, dass auch die Umkehrung gilt, falls M artinsch ist.
(b) Sei $x \in \mathrm{rad}(R)$. Zeigen Sie, dass $1 - x$ eine Einheit in R ist.

Hinweis: Sie können $R(1-x) + \mathrm{rad}(R) = R$ ausnutzen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei k ein Körper und G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\{\lambda \sum_{g \in G} \epsilon_g \mid \lambda \in k\} \subseteq \mathrm{rad}(k[G])$$

genau dann gilt, wenn die Charakteristik von k die Gruppenordnung teilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei k ein Körper. Bestimmen Sie alle unzerlegbaren Moduln (bis auf Isomorphie) über dem Ring der oberen Dreiecksmatrizen

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in k \right\} \subseteq \mathsf{M}_2(k).$$

Beweisen Sie, dass Ihre Klassifikation vollständig ist.

Hinweis: Sie können die Aufgabe 4 vom 4. Übungszettel benutzen, um R-Moduln M als k-lineare Abbildungen ϕ_M auszudrücken. Überlegen Sie sich, wie ein R-Modulhomomorphismus in dieser Formulierung aussieht.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei k ein Körper, $n > 1$ eine ganze Zahl und $M \in \mathsf{M}_n(k)$ eine obere Dreiecksmatrix. Durch Matrizenmultiplikation mit M wird $V = k^n$ auf natürliche Weise zu einem $k[X]$-Modul. Geben Sie eine Kompositionsreihe von M an.

Abgabe: Donnerstag, 5. Juli 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.