

Übungen zur Analysis I

Blatt 1 - Abgabe bis 22.4.05

- Es sei \sim eine reflexive symmetrische Relation auf einer Menge X . Für Elemente x und y von X schreiben wir $x \approx y$ genau dann, wenn es eine endliche Folge x_1, \dots, x_n in X gibt, so dass $x_1 = x$, $x_n = y$ und $x_i \sim x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Zeigen Sie, dass \approx eine Äquivalenzrelation ist.
 - Es sei X die Menge der Felder eines Schachbretts der Größe 3×3 . Für $x, y \in X$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn man durch einen Zug mit dem Springer von x nach y gelangen kann. Beschreiben Sie die Zerlegung von X in Äquivalenzklassen für die entsprechende Relation \approx . Begründen Sie Ihre Antwort.
- Auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ betrachten wir die Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \text{genau dann, wenn} \quad ab' = ba'$$

und die Operation

$$(a, b) + (c, d) := (ad + bc, bd).$$

Zeigen Sie, dass für $r, r', s, s' \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gilt: Wenn $r \sim r'$ und $s \sim s'$, dann $r + s \sim r' + s'$.

- Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\left(\frac{n+1}{2} \right)^n \geq n!$$

durch vollständige Induktion.