

## Übungen zur Analysis I

### Blatt 10 - Abgabe bis 24.6.05

42. Beweisen Sie: Ist  $f$  eine stetige Abbildung des Intervalls  $[a, b]$  in sich, so hat  $f$  einen Fixpunkt, d. h. ein  $c \in [a, b]$  derart, dass  $f(c) = c$ .
43. Zu gegebenen reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit der Eigenschaft  $a^2 + b^2 \neq 0$  bestimme man alle Paare reeller Zahlen  $(c, d)$  derart, dass für alle  $x$  gilt

$$a \cos x + b \sin x = c \sin(x + d).$$

44. Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert oder zeigen Sie, dass er nicht existiert.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}, & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}, \\ \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}, & \text{(d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

45. Die Funktion  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch

$$f(x) = x^s \cos \frac{\pi}{x}$$

definiert. Beweisen Sie:

- (a)  $f$  ist genau dann beschränkt, wenn  $s \geq 0$  gilt.  
(b)  $f$  ist genau dann stetig auf  $[0, 1]$  fortsetzbar, wenn  $s > 0$  gilt.  
(c)  $f$  ist nicht Lipschitz-stetig für  $s < 2$ .
- 46.\* Es sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und injektiv. Beweisen Sie, dass  $f$  streng monoton ist.  
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige  $x, y$  und  $z$  in  $I$  gilt: Liegt  $y$  zwischen  $x$  und  $z$ , so liegt  $f(y)$  zwischen  $f(x)$  und  $f(z)$ .)