Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2005

Übungen zur Analysis I

Blatt 11 - Abgabe bis 1.7.05

47. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte. (Dabei sei $a > 0$, $b > 0$.)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, (b) $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

48. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) f ist beschränkt.

(b) f nimmt jeden Wert zwischen a und b an.

(c) $\sup f \geq \max\{a, b\}$.

(d) Nimmt die Funktion f ihr Supremum nicht an, so ist $\sup f = \max\{a, b\}$.

49. Bestimmen Sie die Ableitungen der durch die folgenden Ausdrücke gegebenen Funktionen. Vereinfachen sie die Ergebnisse.

(a) $\ln \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, (b) $x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$,

(c) $\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$, (d) $x(\sin(\log x) - \cos(\log x))$.

50. Die Funktionen f und g seien an der Stelle a differenzierbar. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(a)g(x)-f(x)g(a)}{x-a}.$$

51.* Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig, und für jeden Häufungspunkt a des Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}$ existiere $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Zeigen Sie, dass sich f auf eindeutige Weise zu einer stetigen Funktion $g : \bar{D} \to \mathbb{R}$ fortsetzt.