

Übungen zur Analysis I

Blatt 12 - Abgabe bis 8.7.05

52. Bestimmen Sie für jede reelle Zahl a die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung

$$e^{ax} = x.$$

53. Für reelle Zahlen x definiert man

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

- (a) Beweisen Sie die Formeln

$$\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass \sinh , $\cosh|_{[0, \infty)}$ und \tanh stetige Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen.
- (c) Zeigen Sie, dass diese Umkehrfunktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen.
- (d) Beweisen Sie die Formeln

$$\operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$
$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

54. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital nachdem Sie ihre Anwendbarkeit untersucht haben:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sinh x)}.$$

55. Für eine Funktion f auf \mathbb{R} und $h > 0$ definieren wir eine Funktion $\Delta_h f$ durch

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

- (a) Finden Sie Formeln für $\Delta_h^2 f = \Delta_h(\Delta_h f)$ und $\Delta_h^3 f$. (Können Sie eine Formel für $\Delta_h^n f$ angeben und beweisen?)

- (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Ist f n -mal differenzierbar, so gibt es für jedes x , h und n ein $\vartheta_n \in (0, n)$ derart, dass

$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x + \vartheta_n h) h^n.$$

- (c) Beweisen Sie: Ist f n -mal stetig differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

- 56.* Die Funktionen f und g seien auf $[a, b]$ stetig, auf (a, b) differenzierbar, und für $x \in (a, b)$ gelte $g'(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Information von der Fachschaft Mathematik:

Vorstellung des Lehranbegots im WS 05/06 am 13.07.05 ab 18 Uhr in H 7