Universität Bielefeld SS 2005
Prof. W. Hoffmann

Übungen zur Analysis I

Blatt 13 - Abgabe bis 15.7.05

57. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Taylorschen Formel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x + 2\arcsin x - 3x}{x^5}, \qquad \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^3}.$$

58. Bestimmen Sie die Taylorreihe

   (a) der Funktion exp bezüglich einer beliebigen Stelle a,

   (b) der Funktion sin bezüglich der Stelle $\frac{\pi}{6}$,

   (c) der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x-x^2}$ bezüglich der Stelle $\frac{1}{2}$.

59. Für jedes Polynom p mit reellen Koeffizienten und jede reelle Zahl s definieren wir eine Funktion $f_{p,s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{p,s}(x) = \begin{cases} x^s p(x) \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

   Beweisen Sie folgende Aussagen.

   (a) Die Funktion $f_{p,s}$ ist stetig.

   (b) Die Funktion $f_{p,s}$ ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist $f_{q,s-2}$ für ein geeignetes Polynom q.

   (c) Die Funktion $f_{p,s}$ ist unendlich oft differenzierbar.

   (d)* Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x \geq 1$.

60. Berechnen Sie die Riemannschen Ober- und Untersummen der Funktion $f(x) = e^x$ auf dem Intervall $[0,1]$ bezüglich äquidistanter Teilungen. Prüfen Sie die Riemann-Integrierbarkeit der gegebenen Funktion direkt anhand der Definition und bestimmen Sie ihr Integral.

61.* Zeigen Sie, dass jede rationale Funktion (d. h. jeder Quotient zweier Polynome) auf ihrem Definitionsbereich analytisch ist, d. h. sich in einer Umgebung jeder Stelle, wo der Nenner nicht verschwindet, durch eine Potenzreihe darstellen lässt.