Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2005

Übungen zur Analysis I

Blatt 5 - Abgabe bis 20.5.05

17. Bestimmen Sie die Grenzwerte dieser Folgen:

$$x_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad y_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n, \qquad z_n = \frac{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}}{n}.$$

18. Es seien $a > b > 0$ gegeben. Wir definieren zwei Folgen x_n und y_n durch

$$\begin{aligned} x_0 &= a, & y_0 &= b, \\ x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2}, & y_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$x_n \geq x_{n+1} \geq y_{n+1} \geq y_n, \qquad x_{n+1} - y_{n+1} \leq \frac{x_n - y_n}{2},$$

und dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.
(Dieser wird das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b genannt.)

19. Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior dieser Folgen:

$$x_n = \frac{(2 + (-1)^n)n - 1}{n+1}, \qquad y_n = 2 \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

20. Beweisen Sie, dass

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

vorausgesetzt, alle vorkommenden Ausdrücke sind definiert.

21.* Es sei $c \geq 0$, und die Folge x_n sei durch

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.