

Übungen zur Analysis I

Blatt 6 - Abgabe bis 27.5.05

22. Gegeben seien eine beschränkte Teilmenge M von \mathbb{R} und eine Abbildung $f : M \rightarrow M$. Angenommen, es gibt $0 \leq a < 1$ derart, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|$$

für alle $x, y \in M$. Nun sei $b \in M$, und die Folge x_n sei durch

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

definiert. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gibt ein $c \geq 0$ mit $|x_n - x_{n+1}| \leq a^n c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ gilt

$$|x_m - x_n| \leq \frac{a^m c}{1 - a}.$$

- (c) Die Folge x_n ist konvergent.

23. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Normalform $x + iy$:

$$\frac{1}{3 + 7i}, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \quad (1 + i\sqrt{3})^3, \quad (1+i)^n + (1-i)^n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

24. Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

- (a) $z^2 = 3 - 4i$
(b) $|z| - z = 1 + 2i$

25. Berechnen Sie

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

- 26.* Gegeben sei eine irrationale Zahl $u > 0$. Für jede natürliche Zahl n sei x_n diejenige Zahl im Intervall $[0, 1)$, für die $nu - x_n$ eine ganze Zahl ist. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Für alle natürlichen Zahlen $m \neq n$ ist $x_m \neq x_n$.
(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen $m \neq n$ mit $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
(c) Jede Zahl im Intervall $[0, 1]$ ist Häufungspunkt der Folge x_n .