Universität Bielefeld SS 2005
Prof. W. Hoffmann

Übungen zur Analysis I

Blatt 7 - Abgabe bis 3.6.05

27. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \geq 0$ und $y_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ folgt. (Hinweis: Cauchy-Kriterium)

28. Stellen Sie für die folgenden Reihen fest, ob sie alternierend sind und ob sie konvergent sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

29. Es sei $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots &= \frac{1}{4}\, a, \\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots &= \frac{3}{4}\, a, \\ 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots &= \frac{2}{3}\, a. \end{aligned}$$

30. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ für:

(a) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n - 2^{-n}}$, (b) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$,

(c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

31.* Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sei divergent, und für alle n sei $x_n > 0$. Wir bezeichnen die Partialsummen mit $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$. Zeigen Sie, daß auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{s_n}$ divergent ist. (Hinweis: Zerlegen Sie die Reihe in geeignete Teilstücke.)