

Übungen zur Analysis I

Blatt 8 - Abgabe bis 10.6.05

32. Finden Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln n} z^n \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n \quad (s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}).$$

33. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle Koeffizienten c_n einer Potenzreihe gilt $0 < a \leq c_n \leq b$. Wie groß ist der Konvergenzradius?

34. Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Mengen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{n}{|n|+1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$M_3 = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid 0 \neq m \in \mathbb{N}, 0 \neq n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort. (Im Fall M_3 gibt es für den Nachweis, dass Sie alle Häufungspunkte gefunden haben, einen Zusatzpunkt.)

35. Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+im)^3},$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Teilsumme der Glieder mit $m \leq n$ und finden Sie eine obere Schranke für die innere Summe über m . Vertauschen Sie dann die Rollen von m und n .)

36.* Es seien $r > 0, s > 0$ derart, dass die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$$

für $|x| < r$ und $|y| < s$ konvergieren. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Koeffizienten $c_{n,k}$, so dass

$$f(x)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_{n,k} x^k$$

für $|x| < r$.

- (b) Ist $\tilde{f}(x)$ durch die Potenzreihe mit den Koeffizienten $|a_k|$ gegeben und sind $\tilde{c}_{n,k}$ die Koeffizienten von $\tilde{f}(x)^n$, so gilt $|c_{n,k}| \leq \tilde{c}_{n,k}$.
- (c) Es gibt ein $t \in (0, r)$ derart, dass $\tilde{f}(|x|) < s$ für $|x| < t$.
- (d) Die Funktion $g(f(x))$ ist für $|x| < t$ durch eine Potenzreihe darstellbar.