

# Übungen zur Analysis I

## Blatt 9 - Abgabe bis 17.6.05

37. An welchen Stellen sind die folgenden auf  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \end{cases} \quad g(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\},$$
$$h(x) = \min\{|x - k| \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

38. Beweisen Sie, dass für stetige Funktionen  $f$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  auch die durch  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  definierte Funktion  $h$  stetig ist.

39. Für  $M \subseteq \mathbb{C}$  sei  $M'$  die Menge aller Häufungspunkte von  $M$ . Beweisen Sie:

- (a) Die Menge  $M'$  ist abgeschlossen, d. h.  $M'' \subset M'$ .
- (b) Es gilt  $(M \cup N)' = M' \cup N'$ .
- (c) Die Menge  $\bar{M} = M \cup M'$  (genannt Abschließung von  $M$ ) ist abgeschlossen, und jede abgeschlossene Menge, die  $M$  enthält, enthält auch  $\bar{M}$ .

40. Es sei  $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$  eine Schachtelung nichtleerer kompakter Teilmengen von  $\mathbb{C}$ . Für jedes  $n$  sei ein Punkt  $x_n \in M_n$  gewählt. Zeigen Sie, dass jeder Häufungspunkt der Folge  $x_n$  zu jeder der Mengen  $M_k$  gehört. Folgern Sie, dass der Durchschnitt  $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$  nichtleer ist.

41.\* Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir definieren  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $F(x) = \sup\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}$ . Beweisen Sie:

- (a) Die Funktion  $F$  ist monoton wachsend.
- (b) Für  $a < x \leq b$  gilt  $F(x) = \sup\{f(t) \mid a \leq t < x\}$ .
- (c) Die Funktion  $F$  ist stetig.