Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2005

Übungen zur Analysis I

Zusatzblatt - freiwillige Abgabe bis 27.5.05

A. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n}-1).$$

B. Beweisen Sie folgende Aussagen über Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

(a) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

C. Beweisen Sie, dass für rationale Zahlen r mit $0 < r < 1$ und reelle Zahlen x mit $x > -1$ gilt

$$(1+x)^r \leq 1 + rx.$$

Hinweis: Betrachten Sie das arithmetische und das geometrische Mittel von mehreren gleichen Zahlen und mehreren Einsen.

D. Es seien x_n und y_n Folgen derart, dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$ für genügend großes n. Wir schreiben

$$x_n \sim y_n \quad \text{für } n \to \infty$$

(und nennen die Folgen asymptotisch äquivalent), wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

Zeigen Sie, dass damit auf der Menge der Folgen, welche für genügend große Indices nicht Null werden, eine Äquivalenzrelation definiert ist. Entscheiden Sie, welche der u. a. Folgen zueinander asymptotisch äquivalent sind:

$$a_n = \sqrt{n^2+1} + n, \qquad b_n = \sqrt{n^2+1} - n, \qquad c_n = \log_2(n + 4^n).$$