Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

29.7.2005

Klausur Analysis I

1. Definieren Sie den Begriff des Häufungspunkts einer Zahlenfolge x_n. Formulieren Sie den Zusammenhang zwischen Häufungspunkten und Teilfolgen. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Folge x_n und eine beliebige Nullfolge y_n die beiden Folgen x_n und $x_n + y_n$ dieselben Häufungspunkte besitzen.

2. Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}},$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\pi n + \frac{1}{n}\Big).$$

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln n}\, z^n,$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+\cos n} z^n.$$

4. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln \tan x},$$ (b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sinh x - 2x}{x^5}.$$

5. Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

   $$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

   Wieviel mal ist diese Funktion differenzierbar, wieviel mal ist sie stetig differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Arbeitszeit: 12.15-13.45 Uhr