

Probeklausur Analysis I

1. Definieren Sie den Begriff eines Häufungspunkts einer Menge. Finden Sie alle Häufungspunkte der Mengen

$$M_1 = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \quad M_2 = \{e^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{k^2}.$$

4. Definieren Sie den Begriff der Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle a . An welchen Stellen ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin e^x}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin e^x}{e^x}.$$