

Übungen zu Analysis I

Blatt 10 - Abgabe bis 16.6.2011

46. An welchen Stellen sind die folgenden auf \mathbb{R} definierten Funktionen stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{anderenfalls,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$
$$h(x) = \min\{|x - k| \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

47. Beweisen Sie, dass für stetige Funktionen f und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auch die durch $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ definierte Funktion h stetig ist.
48. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in]0, 1[$. Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in]0, 1[$ ein $x \in]0, 1 - a[$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x + a).$$

49. Finden Sie Formeln für

$$1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx,$$
$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Drücken Sie das Ergebnis durch trigonometrische Funktionen aus.

- 50.* Beweisen Sie: Ist I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.