Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 11 - Abgabe bis 23.6.2011

51. Zu gegebenen reellen Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 \neq 0$ bestimme man alle Paare reeller Zahlen (c, d) derart, dass für alle x gilt
$$a \cos x + b \sin x = c \sin(x + d).$$

52. Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert oder zeigen Sie, dass er nicht existiert.
(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}$, (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

53. Die Funktion $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ sei durch
$$f(x) = x^s \cos \frac{\pi}{x}$$
definiert. Beweisen Sie:
   (a) f ist genau dann beschränkt, wenn $s \geq 0$ gilt.
   (b) f ist genau dann stetig auf $[0, 1]$ fortsetzbar, wenn $s > 0$ gilt.
   (c) f ist nicht Lipschitz-stetig für $s < 2$.

54. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Beweisen Sie folgende Aussagen.
   (a) f ist beschränkt.
   (b) f nimmt jeden Wert zwischen a und b an.
   (c) $\sup f \geq \max\{a, b\}$.
   (d) Nimmt die Funktion f ihr Supremum nicht an, so ist $\sup f = \max\{a, b\}$.

55.* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > x : f(y) \leq f(x)\}.$$
Zeigen Sie, dass für beliebige Elemente $a < b$ von S gilt:
Wenn $]a, b[\cap S = \varnothing$, dann $f(a) = f(b)$.