Universität Bielefeld SS 2011
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis I

Blatt 12 - Abgabe bis 30.6.2011

56. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte. (Dabei sei $a > 0$, $b > 0$.)

(a) $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sin\ln(x+1) - \sin\ln x\big)$.

57. Für reelle Zahlen x definiert man

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

(a) Beweisen Sie die Formeln

$$\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass sinh, $\cosh|_{[0,\infty[}$ und tanh stetige Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh} : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ und $\operatorname{artanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass diese Umkehrfunktionen (außer arcosh an der Stelle 1) differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen.

(d) Beweisen Sie die Formeln

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\big(y + \sqrt{y^2+1}\,\big), \qquad \operatorname{arcosh} y = \ln\big(y + \sqrt{y^2-1}\,\big),$$
$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

58. Bestimmen Sie die Ableitungen der durch die folgenden Ausdrücke gegebenen Funktionen. Vereinfachen sie die Ergebnisse.

(a) $\ln\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, (b) $\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$,

(c) $\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$, (d) $x(\sin\ln x - \cos\ln x)$.

59. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital, nachdem Sie ihre Anwendbarkeit untersucht haben:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x},$$ (b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \ln(1+x)}.$$

60.* Finden Sie eine injektive Funktion f auf einem Intervall I, die an einer Stelle $a \in I$ differenzierbar ist, so dass $f'(a) \neq 0$, aber die Umkehrfunktion an der Stelle $f(a)$ nicht stetig ist.