Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 13 - Abgabe bis 7.7.2011

61. Für eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ und $h > 0$ definieren wir eine Funktion $\Delta_h f$ durch
$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$
   (a) Finden Sie Formeln für $\Delta_h^2 f = \Delta_h(\Delta_h f)$ und $\Delta_h^3 f$. (Können Sie eine Formel für $\Delta_h^n f$ angeben und beweisen?)
   (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Ist $f \in F^n(\mathbb{R})$, so gibt es für jedes x, h und n ein $\vartheta_n \in]0, n[$ derart, dass
$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x + \vartheta_n h) h^n.$$
   (c) Beweisen Sie: Ist $f \in C^n(\mathbb{R})$, so gilt
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

62. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Taylorschen Formel:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \operatorname{artanh} x}{x^5}, \qquad \lim_{x \to 0} (\cos x^2)^{1/x^4}.$$

63. Bestimmen Sie die Taylorreihe
   (a) der Funktion ln bezüglich einer beliebigen Stelle $a > 0$,
   (b) der Funktion cos bezüglich der Stelle $\frac{\pi}{6}$,
   (c) der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 2}$ bezüglich der Stelle $\frac{1}{2}$.

   Finden Sie jeweils den Konvergenzradius.

64. Für jedes Polynom p mit reellen Koeffizienten und jede reelle Zahl s definieren wir eine Funktion $f_{p,s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$f_{p,s}(x) = \begin{cases} x^s p(x) \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$
   Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Funktion $f_{p,s}$ ist stetig.

(b) Die Funktion $f_{p,s}$ ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist $f_{q,s-2}$ für ein geeignetes Polynom q.

(c) Die Funktion $f_{p,s}$ ist unendlich oft differenzierbar.

(d)* Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x \geq 1$.

65.* Wir betrachten die Taylorreihe

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Zeigen Sie, dass die Zahlen a_n ganz sind.